РАЗДЕЛ II. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 330.4:519.86:330.101.542

*ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МИКРОЭКОНОМИКИ**

П.М. Симонов, д. физ.-мат. наук, проф. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Электронный адрес: simonov@econ.psu.ru
Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Рассмотрены модификации некоторых моделей микроэкономики на основе введения вместо инерционных звеньев первого порядка инерционных звеньев первого порядка с кусочно постоянными запаздываниями. Изучается устойчивость некоторых модифицированных моделей микроэкономики.

Ключевые слова: динамические модели микроэкономики; инерционное звено с кусочно постоянным запаздываниям первого порядка; устойчивость модифицированных моделей.

1. Введение

Разнообразные явления окружающего мира представляют собой источники моделей, учитывающих не только настоящее состояние объекта исследования, но и существенно использующих предысторию его развития. Кроме того, возникают такие постановки задач, которые требуют построения и анализа моделей, учитывающих зависимость текущего состояние объекта от его будущих состояний. Для таких задач обыкновенные дифференциальные уравнения уже не являются удовлетворительной математической моделью. Более точное математическое описание в этом случае дают функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) с последействием (ФДУП).

Здесь для случая непрерывного распределенного запаздывания предложено использовать операторы Вольтерры, которые являются операторами Коши [1] некоторых элементарных ФДУП, возникающих в экономических задачах. Как известно [3, 17, 19] в динамических моделях экономики используют инерционные и дискретные запаздывания между входными и выходными процессами. При этом инерционные запаздывания первого порядка определяют бесконечно длящиеся переходные процессы, что не всегда адекватно реальным процессам. Нами предложено моделировать запаздывание между входным и выходным процессом линейным дифференциальным уравнением (элементарной моделью) вида

$$Ty'(t) + y([t/T]T) = x(t)\,,\ \ t \ge 0\,, \quad (1)$$

где T – время (лаг) запаздывания (переходного процесса); $[t/T]$ – целая часть вещественного числа t/T; $x(t)$ – входной процесс; $y(t)$ – выходной процесс. Ниже для простоты изложения будем считать все функции заданными при $t \ge 0$. В случае $x(t) \equiv 1$ и $y(0)=0$ решение уравнения (1) имеет вид $y(t)=t/T$ при $0 \le t \le T$ и $y(t)=1$ при $t > T$. Таким образом, переход из состояния 0 в состояние 1 происходит по линейной зависимости за время T .

В монографии [16, с. 60] отмечено: «Имеется большое разнообразие способов начисления амортизации. В зависимости от принятого способа годовая норма амортизации может выбираться следующими способами: равномерно, если стоимость каждой единицы основных фондов возмещается равными долями в течение всего срока службы; прогрессивно, по нарастающей шкале; по убывающей шкале; по проработанному времени. На практике наиболее распространен равномерный способ начисления амортизации. Он наиболее прост и удобен в задачах учета и анализа хозяйственной деятельности. Однако непосредственное использование равномерной нормы амортизации в задачах математической экономики встречает некоторые затруднения. Это связано с тем, что при разновременных капиталовложениях и равномерном способе начисления амортизации невозможно записать динамику основных фондов в виде обыкновенного дифференциального уравнения».

Далее авторы приводят уравнение динамики основных производственных фондов (ОПФ), которое в принятых нами обозначениях имеет вид

$$K'(t) = I(t) - \mu K(t), \qquad (2)$$

где $K(t)$ – уровень ОПФ в момент времени t; $I(t)$ – интенсивность валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; μ – (постоянная) норма амортизации (выбытия) ОПФ за единицу времени.

В монографии [16, с. 60] также отмечено, что уравнение (2) «… приближенно реализует равномерный способ начисления амортизации. По сравнению с равномерным способом уравнение (2) приводит к несколько ускоренной амортизации».

Нами предложена линейная ФДУ равномерного способа начисления амортизации в виде

$$K'(t) = I(t) - \mu K([t]). \qquad (3)$$

Как правило, норму μ определяют равенством $\mu = 1/T$, где T – количество единичных временных промежутков. Величина T берется целочисленной и имеет смысл времени (лага) амортизации. В модели (3) при $I(t) \equiv 1$ и $K(0) = 0$ на промежутке $[0,1)$ амортизация не производится, поэтому ОПФ растут по линейному закону $K(t) = t$. Далее $K(t)$ будет возрастающей кусочно линейной функцией, стремящейся на бесконечности к уровню T единиц ОПФ.

В книге [28, с. 66] приведен следующий перевод одной фразы из статьи М.Калецкого 1935 года [31]: «… никоим образом введение постоянного запаздывания не соответствует действительности; есть только средняя величина различных наблюдаемых продолжительностей периода запаздывания и система, в которой τ есть постоянная величина, должна рассматриваться как простейшая модель действительности». В монографии [17, с. 41] отмечена необходимость использования в динамических моделях экономики переменного характера памяти о предыстории, влияющей на развитие системы и приводящей к принципиальному изменению характера развития процесса.

В статье с учетом моделей (1), (3) предлагаются модификации известных моделей микроэкономики. Первые статьи на эту тему были опубликованы в [26, 27].

Всюду ниже для простоты изложения будем считать все функции заданными при $t \geq 0$. Кроме специально оговоренных случаев полагаем, что функции дифференцируемы столько раз, сколько это необходимо для вывода моделей.

2. Модификация известных моделей

2.1. *Модель Вальраса – Эванса – Самуэльсона (ВЭС) рынка одного товара с учетом запаздывания цен спроса* (2) *и предложения* (см., например, [3, гл. 1, 1.8, с. 36-37; 4, Ч. II, гл. 2, § 7, с. 165; 5, гл. VI, § 2, с. 196-198; 8, гл. 2, 2.1, с. 18-19; 14, 2.4, с. 30-31; 19, Ч. II, гл. 7, 7.1, 7.1.2, с. 197-198; 32]). Модифицированная модель ВЭС такого вида может быть записана в виде системы

$$T_S P_S'(t) + P_S([t/T_S]T_S) = P_D(t) + \eta_1(t),$$
$$T_D P_D''(t) + P_D'([t/T_D]T_D) =$$
$$= H[E(P_D(t), P_D'(t), P_S(t), P_S'(t))] + \eta_2(t),$$

где $P_S(t)$ – цена предложения товара в момент времени t; $P_D(t)$ – цена спроса на товар в момент времени t; T_S, T_D – лаги запаздывания; $\eta_1(\cdot)$, $\eta_2(\cdot)$ – неконтролируемые возмущения; $H[\cdot]$ – функция чувствительности, скорости реакции или подстройки цены, $H[0] = 0$, $H' > 0$; $E(t) = E(P_D(t), P_D'(t), P_S(t), P_S'(t))$ – функция избыточного спроса, $E = D - S$, где $D = D(P_D, P_D')$ – функция спроса (функция взаимосвязи спроса и цены), причем $\partial D/\partial P_D \leq 0$, $\partial D/\partial P_D' \leq 0$; $S = S(P_S, P_S')$ – функция предложения (функция взаимосвязи предложения и цены), причем $\partial S/\partial P_S \geq 0$, $\partial S/\partial P_S' \geq 0$. Свойства функций H, D и S можно найти, например, в [4, Ч. II, гл. 2, § 7, с. 165; 14, 2.4, с. 30; 15, гл. 9, 9.2, с. 352-354; 20, гл. 5, 5.4, с. 220; 21, Ч. III, 12.3, с. 228; 23, гл. VI, § 19.1, с. 431, § 19.2, с. 437-438].

2.2. *Модель ВЭС рынка одного товара с учетом запаздывания спроса от предложения, а также с учетом запаздывания цены спроса от цены предложения*. В статье [22] предложен вариант модели ВЭС с тремя переменными и с тремя инерционными запаздываниями. Запишем модифицированный вариант модели в обозначениях нашей статьи:

$$T_1 Q_D'(t) + Q_D([t/T_1]T_1) = Q_S(t) + \eta_1(t),$$
$$T_2 Q_S'(t) + Q_S([t/T_2]T_2) = S(P_S(t)) + \eta_2(t),$$
$$T_3 P_S'(t) + P_S([t/T_3]T_3) = P_D(t) + \eta_3(t),$$
$$T_4 P_D'(t) + P_D([t/T_4]T_4) = D_+^{-1}(Q_D(t)) + \eta_4(t),$$

где $Q_D(t)$ – текущий спрос на товар в момент времени t; $Q_S(t)$ – текущее предложение товара в момент времени t; $\eta_k(\cdot)$, $k = \overline{1,4}$ –

неконтролируемые возмущения; T_k, $k=\overline{1,4}$ – лаги запаздывания; $D_+^{-1}(Q_D)$ = $D^{-1}(Q_D)$, если $D_+^{-1}(Q_D)\ge 0$, $D_+^{-1}(Q_D)=0$, если $D^{-1}(Q_D)<0$. Здесь $D=D(P)$ – функция спроса, $S=S(P)$ – функция предложения.

2.3. *Модель Маршалла рынка одного товара с учетом запаздывания предложения и запаздывания цены предложения* (см., например, [3, гл. 1, 1.8, с. 38-39; 14, 2.4, с. 31-32]). Модификация модели А.Маршалла может быть записана в виде системы

$$T_1P_S'(t)+P_S([t/T_1]T_1)=D^{-1}(S(t))+\eta_1(t),$$

$$T_2S''(t)+S'([t/T_2]T_2)=H[D^{-1}(S(t)-P_S(t))]+\eta_2(t),$$

где большинство обозначений аналогичны соответствующим обозначениям из примера 2.1. Кроме того, $D^{-1}(S(t))$ = $P_D(t)$ – цена спроса, определяемая из условия равновесия $S(t)=D(P_D(t))$.

2.4. *Модель Аллена рынка одного товара с учетом запаздывания предложения и с зависимостью спроса и предложения от цены и скорости изменения цены* (см., например, [3, гл. 1, 1.3, с. 25-27; 15, гл. 8, 8.9, Задача 1, с. 333-334]). Модификация модели Р.Аллена может быть записана в виде системы

$$TS'(t)+S([t/T]T)=D(P(t),P'(t))+\eta_1(t),$$

$$\Psi(P(t),P'(t))=S(t)+\eta_2(t),$$

где $D=D(P,P')$ – функция взаимосвязи спроса и цены, причем $\partial D/\partial P\le 0$, $\partial D/\partial P'\le 0$; $\Psi=\Psi(P,P')$ – функция взаимосвязи предложения и цены, причем $\partial\Psi/\partial P\ge 0$, $\partial\Psi/\partial P'\ge 0$.

2.5. *Модель ВЭС рынка одного товара с учетом отклонения запаса от заданного уровня и с учетом запаздывания цены* (см., например, [3, гл. 1, 1.7, с. 35-36; 8, гл. 2, 2.2, с. 21-22; 13, гл. 6, 6.3, п. 1, с. 193, п. 4, с. 198; 15, гл. 8, 8.9, Задача 3, с. 334; 32]). Модификация этой модели может быть записана в виде системы

$$TP''(t)+P'([t/T]T)=-H(Q(t)-\bar{Q}(t))+\eta_1(t),$$

$$Q'(t)=-E(P(t),P'(t))+\eta_2(t),$$

где большинство обозначений аналогичны соответствующим обозначениям из примера 2.1. В частности, $E=E(P,P')$ – функция избыточного спроса, $E=D-S$, где $D=D(P,P')$ – функция спроса, а $S=S(P,P')$ – функция предложения; $\bar{Q}(t)$ – заданный уровень запаса в момент времени t.

2.6. *Модель ВЭС рынка нескольких товаров учетом запаздывания цен предложения и спроса* (см., например, [4, Ч. II, гл. 2, § 7, с. 164-176; 14, 3.4, с. 51; 15, гл. 9, 9.2, с. 353-355, 9.7, 9.8, с. 381-389; 20, гл. 5, 5.4, с. 219-222; 21, Ч. III, 12.3, с. 226-234; 23, гл. VI, § 19.1, с. 429-437, § 19.2, с. 437-452]). Модификация этой модели для n товаров может быть записана в виде системы n пар уравнений вида

$$T_{S,k}P_{S,k}'(t)+P_{S,k}([t/T_{S,k}]T_{S,k})=P_{D,k}(t)+\eta_{S,k}(t),$$

$$T_{D,k}P_{D,k}''(t)+P_{D,k}'([t/T_{D,k}]T_{D,k})=$$

$$=H_k[E(P_{D,k}(t),P_{D,k}'(t),P_{S,k}(t),P_{S,k}'(t))]+\eta_{D,k}(t),$$

где все обозначения аналогичны соответствующим обозначениям из примера 2.1.

2.7. *Модель Видала – Вулфа (ВВ) объема сбыта одного товара в зависимости от расходов на рекламу* (см., например, [13, гл. 1, 1.1, п. 4, с. 25-26, гл. 6, 6.1, п. 1, с. 183-184; 33]). Модификация этой модели для одного товара может быть записана в виде уравнения

$$TQ'(t)+Q([t/T]T)=H[A(t)(1-Q(t)/M)]+\eta(t),$$

где $Q(t)$ – объем реализации товара в момент времени t; $A(t)$ – интенсивность затрат на рекламу в момент времени t; M – уровень насыщения рынка данным товаром; T – среднее время забывания потребителями информации о рекламируемом товаре. Все остальные обозначения аналогичны соответствующим обозначениям из примера 2.1, причем функция $H[q]$ такова, что $H[q]=0$ при $q\le 0$.

2.8. *Модель ВВ объема сбыта двух взаимодополняющих товаров в зависимости от расходов на рекламу* (см., например, [13, гл. 1, 1.1, п. 5, с. 30, гл. 5, 5.4, с. 149-150; 31]). Модификация этой модели может быть записана в виде системы

$$T_1Q_1'(t)+Q_1([t/T_1]T_1)=H_1[A_1(t)(1-Q_1(t)/M_1)]+\eta_1(t),$$

$$T_2Q_2'(t)+Q_2([t/T_2]T_2)=$$

$$=H_2[A_2(t)(1-Q_2(t)M_1/(Q_1(t)M_2))]+\eta_2(t),$$

где $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ – объемы реализации товаров в момент времени t. Все остальные обозначения аналогичны соответствующим обозначениям из примера 2.1, причем функции $H_k[q]$ таковы, что $H_k[q]=0$ при $q\le 0$. Первый товар считается ведущим, т.е. второй товар необходим для потребления первого. Поэтому в модели сектор рынка второго товара ограничен контролируемой долей рынка первого товара. Это означает, что на всех траектория модели при всех $t\ge 0$ должны выполняться неравенства $0<Q_2(t)/M_2$ $\le$ $Q_1(t)/M_1\le 1$.

2.9. *Модель динамики уровня основных производственных фондов (ОПФ, производственного капитала) с учетом выбытия и запаздывания освоения инвестиций* (см., например, [10, гл. 2, § 4, с. 87-88; 19, Ч. I, гл. 4, 4.2, с. 112-113; 24, гл. 2, § 2.4, с. 43-46]).

Модификация этой модели может быть записана в виде системы

$$K'(t)+\mu K(t)=V(t)+\eta_1(t),$$

$$\tau V'(t)+V([t/\tau]\tau)=I(t)+\eta_2(t),$$

где $K(t)$ – уровень ОПФ в момент времени t; $V(t)$ – интенсивность ввода реальных инвестиций в момент времени t; $I(t)$ – интенсивность выделения (запланированных) инвестиций в момент времени t; μ – норма амортизации, τ – инвестиционный лаг.

В случае равномерного способа начисления амортизации первое уравнение модели примет вид

$$K'(t)+\mu K([t])=V(t)+\eta_1(t).$$

2.10. *Модель управляемого производства в зависимости от поступающих заказов и заданного уровня запасов на складе* [28, гл. 3, 3-3, с. 67-69]. Модификация этой модели может быть записана в виде уравнения

$$Tz''(t)+z'([t/T]T)+k_1k_2z(t)=$$

$$=k_1k_2\bar z(t)-k_1\bar x(t)+\eta(t).$$

Здесь $z(t)$ – текущий уровень запасов продукции на складе в момент времени t, $z(t)$ = $=\int_0^t(y(s)-x(s))ds$ + $\eta_1(t)$, где $x(t)$ – интенсивность заказов на продукцию в момент времени t, $y(t)$ – действующая производительность или интенсивность выпуска продукции в момент времени t; $\bar z(t)$ – заданный уровень запасов продукции на складе в момент времени t; $\bar x(t)$ = $Tx'(t)$ + + $x([t/T]T)$ – $k_3x(t)$; k_1, k_1, k_3 – положительные параметры модели. В модели предложена зависимость $\bar y(t)$ = $k_2(\bar z(t)-z(t))$ + + $k_3x(t)$ + $\eta_2(t)$ для планируемой производительности выпуска продукции (интенсивности выпуска продукции) $\bar y(t)$ в момент времени t, а также запаздывание между действующей и планируемой производительностью выпуска продуки, описываемое уравнением

$$Ty'(t)+y([t/T]T)=\bar y(t)+\eta_3(t).$$

2.11. *Модель формирования связанных установок поведения индивидов с учетом запаздывания.* В работах [9; 18] приведены, а также аналитически и численно исследованы гомеостатические системы и структуры социально-экономических установок. Приведем модификацию одной модели из статьи [9]:

$$x_i'(t)=A_i\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k(t)-\sigma_i x_i(t)\right)-$$

$$-B_i\left(x_i(t)-\sum_{r=1}^{R_i}\gamma_{ir}x_{ir}(t)\right)-C_i(x_i(t)-b_i)+\overline{\eta}_i(t),$$

$$T_{ir}x_{ir}'(t)+x_{ir}([t/T_{ir}]T_{ir})=x_i(t)+\eta_{ir}(t),\ r=\overline{1,R_i}.$$

Здесь $x_i(t)$ – уровень установки индивидов из i-й референтной группы; A_i, λ_k, σ_i, B_i, γ_{ir}, C_i, b_i, T_{ir} – неотрицательные параметры, где A_i – склонность к подражанию, λ_k – вес k-той установки, $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$, σ_i – коэффициент (вес) собственной значимости, B_i – коэффициент самоутверждения или коэффициент силы инерции, γ_{ir} – коэффициенты усреднения, $\sum_{r=1}^{R_i}\gamma_{ir}=1$, C_i – коэффициент внушаемости, b_i – навязываемые извне установки, T_{ir} – лаг запаздывания влияния предыдущих значений i-й установки. Смысл основного уравнения модели состоит в том, что интенсивность изменения установки складывается их трех величин: интенсивности изменения установки в сторону «большинства» («подражание», «социализация»), интенсивности инертности («индивидуализм»), интенсивности давления на установку индивида извне (воспитание, пропаганда, реклама и т.п.).

3. Устойчивость модифицированных моделей

Рассмотрим несколько примеров применения теоремы 3 из статьи [25] (см. также работы А.И.Башкирова [6;7] и А.И.Домошницкого с соавторами [12;30]) для исследования устойчивости решений линейных периодических линейных ФДУП, возникающих при моделировании задач микроэкономики.

3.1. *Линейная модель ВЭС рынка одного товара с учетом запаздывания цены.* Модифицированная модель ВЭС имеет вид

$$TP''(t)+P'([t/T]T)=\lambda E(P(t))+\eta(t), \qquad (4)$$

где $P(t)$ – цена единицы товара в момент времени t; $T>0$ – лаг запаздывания, $\eta(\cdot)$ – неконтролируемое возмущение, $\lambda>0$ – коэффициент чувствительности, скорости реакции или подстройки цены; $E(P(t))$ – функция избыточного спроса в момент времени t, $E=D-S$, где $D=\alpha-aP$ – функция спроса (функция взаимосвязи спроса и цены), $S=-\beta+bP$ – функция предложения (функция взаимосвязи предложения и цены), причем все параметры a, b и α и β положительны.

Будем изучать экспоненциальную устойчивость нулевого решения

$T-$ периодического линейного однородного уравнения второго порядка

$$T\ddot{x}(t)+\dot{x}([t/T]T)+\lambda(a+b)x(t)=0,\ t\geq 0, \quad (5)$$

описывающего отклонение $x=P-P^*$ цены P от положения равновесия $P^*=(\alpha+\beta)/(a+b)$.

Фундаментальные решения x_1 и x_2 уравнения (5) на отрезке $[0,T]$, удовлетворяющие соответственно начальным условиям $x_1(0)=1$, $\dot{x}_1(0)=0$, $x_2(0)=0$, $\dot{x}_2(0)=1$, имеют вид $x_1(t)=\cos(\sigma t)$,

$$x_2(t)=1/(\lambda(a+b))\cos(\sigma t)+$$
$$+1/\sigma\sin(\sigma t)-1/(\lambda(a+b)),$$

где $\sigma=\sqrt{\lambda(a+b)/T}$.

Матрица монодромии $X(T)$ эквивалентной двумерной системы имеет вид

$$X(T)=\begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ \dot{x}_1(T) & \dot{x}_2(T)\end{pmatrix},$$

где $x_1(T)=\cos(\sigma T)$, $\dot{x}_1(T)=-\sigma\sin(\sigma T)$,

$$x_2(T)=1/(\lambda(a+b))\cos(\sigma T)+$$
$$+1/\sigma\sin(\sigma T)-1/(\lambda(a+b)),$$
$$\dot{x}_2(T)=-\sigma/(\lambda(a+b))\sin(\sigma T)+\cos(\sigma T).$$

Отсюда находим коэффициенты

$$a_1=\sigma/(\lambda(a+b))\sin(\sigma T)-2\cos(\sigma T)$$

и

$$a_2=1-\sigma/(\lambda(a+b))\sin(\sigma T)$$

характеристического уравнения

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$$

для собственных чисел λ_1 и λ_2 матрицы $X(T)$.

Оба корня этого уравнения по модулю меньше единицы тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (см., например, [11, гл. III, § 16, с. 190]):

$$1+a_1+a_2>0,\quad 1-a_1+a_2>1,\quad 1-a_2>0.$$

В нашем случае такая система неравенств имеет вид

$$\cos(\sigma T)<1,\quad \sin(\sigma T-\phi)<1/A,\quad \sin(\sigma T)>0,$$

где

$$\sigma T=\sqrt{\lambda T(a+b)},\quad A=\sqrt{1+1/(\lambda T(a+b))},$$
$$\sin\phi=1/A,\quad \cos\phi=1/\sqrt{1+\lambda T(a+b)}.$$

Отсюда получаем, что зоны экспоненциальной устойчивости положения равновесия модели (4) определены неравенствами

$$2\pi l+\arcsin(1/A)<\sqrt{\lambda T(a+b)}<$$
$$<2\pi l+2\arcsin(1/A),\quad l\in Z_+,$$

или неравенствами

$$(2m+1)\pi<\sqrt{\lambda T(a+b)}<$$
$$<(2m+1)\pi+\arcsin(1/A),\quad m\in Z_+$$

3.2. *Линейная модель ВЭС рынка одного товара с кусочно постоянным запаздыванием цены предложения.* Модифицированная модель ВЭС имеет вид

$$P'(t)=\lambda E(P(t),P([t/T])T)+\eta(t), \quad (6)$$

где $E=D-S$, $D(t)=\alpha-aP(t)$, $S(t)=$ $=-\beta+bP([t/T]T)$; λ, T, a, b, α, β – положительные параметры.

Будем изучать экспоненциальную устойчивость тривиального решения $T-$ периодического линейного однородного уравнения первого порядка

$$\dot{x}(t)+\lambda bx([t/T]T)+\lambda ax(t)=0,\ t\geq 0, \quad (7)$$

описывающего отклонение $x=P-P^*$ цены P от равновесной цены $P^*=(\alpha+\beta)/(a+b)$.

На отрезке $[0,T]$ фундаментальное решение X уравнения (7) определено равенством

$$X(t)=(1+b/a)\exp(-\lambda at)-b/a,$$

откуда

$$X(T)=(1+b/a)\exp(-\lambda aT)-b/a.$$

Так как параметры λ, T, a и b положительны, то неравенство $X(T)<1$ всегда выполнено. Итак, установили, что положения равновесия модели (6) экспоненциально устойчиво.

3.3. *Линейная модель Маршалла рынка одного товара с учетом запаздывания предложения.* Модификация модели А.Маршалла может быть записана в виде уравнения

$$TS''(t)+S'([t/T]T)=\lambda(P_D(t)-P_S(t))+\eta(t), \quad (8)$$

где большинство обозначений аналогичны соответствующим обозначениям из примера 3.1. Заметим только, что $P_D(t)$ – цена спроса единицы товара в момент времени t, определяемая из условия равновесия $S(t)=D(P_D(t))$, $P_S(t)$ – цена предложения единицы товара в момент времени t.

Найдем условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения $T-$ периодического линейного однородного уравнения второго порядка

$$T\ddot{x}(t)+\dot{x}([t/T]T)+\lambda(a+b)/(ab)x(t)=0,\ t\geq 0,$$

описывающего отклонение $x=S-S^*$ предложения S от равновесного предложения (положения равновесия) $S^*=(\alpha b-\beta a)/(a+b)>$ >0.

Вывод этих условий аналогичен выводу условий примера 3.1. В нашем случае получается система неравенств

$$\cos(\sigma T)<1,\quad \sin(\sigma T-\phi)<1/A,\quad \sin(\sigma T)>0,$$

где

$$\sigma T=\sqrt{\lambda T(a+b)/(ab)},\quad A=\sqrt{1+ab/(\lambda T(a+b))},$$
$$\sin\phi=1/A,\quad \cos\phi=1/\sqrt{1+\lambda T(a+b)/(ab)}.$$

Отсюда получаем, что зоны экспоненциальной устойчивости положения равновесия модели (8) определены неравенствами

$$2\pi l + \arcsin(1/A) \ < \ \sqrt{\lambda T(a+b)/(ab)} \ <$$
$$< \ 2\pi l + 2\arcsin(1/A),\ l \in Z_+ ,$$

или неравенствами

$$(2m+1)\pi \ < \ \sqrt{\lambda T(a+b)/(ab)} \ <$$
$$< \ (2m+1)\pi + \arcsin(1/A),\ m \in Z_+ .$$

3.4. *Линейная модель Аллена рынка одного товара с учетом запаздывания предложения.* Модифицированная модель Р.Аллена имеет вид

$$TS'(t) + S([t/T]T) = D(t) + \eta(t), \qquad (9)$$

где $P(t)$ – цена единицы товара в момент времени t; $T > 0$ – лаг запаздывания предложения, $\eta(\cdot)$ – неконтролируемое возмущение; $D = \alpha - aP$ – функция спроса (функция взаимосвязи спроса и цены); $S = -\beta + bP$ – функция предложения (функция взаимосвязи предложения и цены); причем все параметры a, b и α и β положительны.

Будем изучать экспоненциальную устойчивость тривиального решения $T-$периодического линейного однородного уравнения первого порядка

$$Tb\dot{x}(t) + bx([t/T]T) + ax(t) = 0,\ t \ge 0, \qquad (10)$$

описывающего отклонение $x = S - S^*$ предложения S от равновесного предложения (положения равновеси) $S^* = (\alpha b - a\beta)/(a+b) >$ > 0.

На отрезке $[0, T]$ фундаментальное решение X уравнения (10) определено формулой

$$X(t) = (1 + b/a)\exp(-at/(bT)) - b/a ,$$

откуда

$$X(T) = (1 + b/a)\exp(-a/b) - b/a .$$

Так как параметры a и b положительны, то неравенство $X(T) < 1$ всегда выполнено. Итак, установили, что положения равновесия модели (9) экспоненциально устойчиво.

3.5. *Линейная модель ВВ объема сбыта одного товара в зависимости от расходов на рекламу.* Модификация этой модели для одного товара может быть записана в виде уравнения

$$TQ'(t) + Q([t/T]T) =$$
$$= \lambda A(t)(1 - Q(t)/M) + \eta(t) ,$$

где $Q(t)$ – объем реализации товара в момент времени t; $A(t) \ge 0$ – интенсивность затрат на рекламу в момент времени t ; $M > 0$ – уровень насыщения рынка данным товаром; $T > 0$ – среднее время забывания потребителями информации о рекламируемом товаре. Все остальные обозначения аналогичны соответствующим обозначениям из примера 3.1. Кроме всего прочего, будем предполагать, что $A(\cdot)$ – периодическая функция с периодом T .

Найдем условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения $T-$периодического линейного однородного уравнения первого порядка

$$TQ'(t) + Q([t/T]T) + r(t)Q(t) = 0,\ t \ge 0, \qquad (11)$$

где $r(t) = \lambda A(t)/M$.

На отрезке $[0, T]$ фундаментальное решение Q_1 уравнения (11) определено формулой

$$Q_1(t) \ =$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{T}\int_0^t r(s)\,d\,s\right)\left(1 - \frac{1}{T}\int_0^t \exp\left[\frac{1}{T}\int_0^s r(\tau)\,d\,\tau\right] d\,s\right).$$

Отсюда видим, экспоненциальная устойчивость тривиального решения уравнений (11) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$1 < \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T r(s)\,d\,s\right) + \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left[\frac{1}{T}\int_0^s r(\tau)\,d\,\tau\right] d\,s .$$

Критерий неустойчивости имеет вид

$$1 > \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T r(s)\,d\,s\right) + \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left[\frac{1}{T}\int_0^s r(\tau)\,d\,\tau\right] d\,s$$

При

$$1 = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T r(s)\,d\,s\right) + \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left[\frac{1}{T}\int_0^s r(\tau)\,d\,\tau\right] d\,s$$

в модели возникают периодические процессы.

3.6. *Линейная модель динамики уровня ОПФ с равномерным начислением амортизации.* Модификация этой модели может быть записана в виде уравнения

$$K'(t) + \mu K([t]) = V(t) + \eta(t), \qquad (12)$$

где $K(t)$ – уровень (объем) ОПФ в момент времени t; $V(t)$ – интенсивность ввода реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; μ – норма выбытия (износа, амортизации), $\eta(\cdot)$ – неконтролируемое возмущение, $[t]$ – целая часть вещественного числа t .

На отрезке $[0, T]$ фундаментальное решение K_1 уравнения (12) определено формулой $K_1(t) = 1 - \mu t,$ откуда $K_1(1) = 1 - \mu$. Так как $0 < \mu < 1$, то тривиальное решение модели (12) всегда экспоненциально устойчиво.

3.7. *Модель управляемого производства в зависимости от поступающих заказов и заданного уровня запасов на складе.* Модификация этой модели может быть записана в виде уравнения

$$Tz''(t) + z'([t/T]T) + k_1k_2z(t) =$$
$$= k_1k_2\bar{z}(t) - k_1\bar{x}(t) + \eta(t).$$

Здесь $z(t)$ – текущий уровень запасов продукции на складе в момент времени t; где $x(t)$ – интенсивность заказов на продукцию в момент времени t; $y(t)$ – действующая производительность или интенсивность выпуска продукции в момент времени t; $\overline{z}(t)$ – заданный уровень запасов продукции на складе в момент времени t; $\overline{x}(t)$ = $Tx'(t)$ + $x([t/T]T)$ - – $k_3x(t)$, $t \geq 0$; k_1, k_1, k_3 – положительные параметры модели. В модели предложена зависимость для планируемой производительности выпуска продукции (интенсивности выпуска продукции) в момент времени t, а также запаздывание между действующей и планируемой производительностью выпуска продукции, описываемое уравнением

$$Ty'(t) + y([t/T]T) \;=\; \overline{y}(t) + \eta_3(t),\; t \geq 0.$$

Найдем условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения T – периодического линейного однородного уравнения второго порядка

$$Tz''(t) + z'([t/T]T) + k_1k_2z(t) = 0,\; t \geq 0. \qquad (13)$$

Вывод этих условий аналогичен выводу условий примера 3.1. В нашем случае получается, что зоны экспоненциальной устойчивости тривиального решения модели (13) определены неравенствами

$$2\pi l + \arcsin(1/A) \;<\; \sqrt{kT} \;<$$
$$< 2\pi l + 2\arcsin(1/A),\; l \in Z_+,$$

или неравенствами

$$(2m+1)\pi \;<\; \sqrt{kT} \;<$$
$$< (2m+1)\pi + \arcsin(1/A),\; m \in Z_+,$$

где $A = \sqrt{1 + 1/(kT)}$.

3.8. *Нелинейная модель ВЭС рынка одного товара с кусочно постоянным запаздыванием цены предложения.* Модифицированная модель ВЭС имеет вид

$$P'(t) = H[E(P(t), P([t/T]T))] + \eta(t), \qquad (14)$$

где T > 0 – лаг запаздывания цены предложения; $\eta(\cdot)$ – неконтролируемое возмущение, $H[\cdot]$ – непрерывно дифференцируемая функция чувствительности, скорости реакции или подстройки цены, $H[0] = 0$, $H' > 0$, $H'(0) = \lambda$ > > 0; $E(t) = D(t) - S(t)$ – функция избыточного спроса в момент времени t, где $D(t) = D(P(t))$ – непрерывно дифференцируемая функция спроса в момент времени t (функция взаимосвязи спроса и цены в момент времени t), причем $\partial D/\partial P < 0$, $S(t)$ = $S(P([t/T]T))$ – непрерывно дифференцируемая функция предложения в момент времени t (функция взаимосвязи предложения и цены в момент времени t), причем $\partial S/\partial P > 0$.

Предположим, что уравнение (14) имеет единственное положение равновесия $P^* > 0$. Обозначим $(\partial D/\partial P)(P^*) = -a$, $(\partial S/\partial P)(P^*) = b$.

Линейное однородное уравнение первого приближения имеет вид

$$\dot{x}(t) + \lambda bx([t/T]T) + \lambda ax(t) = 0,\; t \geq 0, \qquad (15)$$

где $x = P - P^*$ – отклонение цены P от равновесной цены P^*. В примере 3.2 установлено, что тривиальное решение уравнения (15) экспоненциально устойчиво. Тогда из работ А.И.Башкирова (см., например, [6, 7]) следует, что функция Коши этого уравнения [1] имеет экспоненциальную оценку с отрицательным показателем. Отсюда следует C – устойчивость уравнения (15). А значит, в силу теоремы 4 из статьи [2] уравнение (14) локально C – устойчиво в окрестности положения равновесия.

3.9. *Нелинейная модель Аллена рынка одного товара с учетом запаздывания предложения.* Модифицированная модель Р.Аллена имеет вид

$$TS'(t) + S([t/T]T) = D(P(t)) + \eta(t), \qquad (16)$$

где $P(t)$ – цена единицы товара в момент времени t; $T > 0$ – лаг запаздывания предложения; $\eta(\cdot)$ – неконтролируемое возмущение; $D(t) = D(P(t))$ – непрерывно дифференцируемая функция спроса в момент времени t (фунция взаимосвязи спроса и цены в момент времени t), причем $\partial D/\partial P < 0$, $S(t)$ = $S(P(t))$ – непрерывно дифференцируемая функция предложения в момент времени t (функция взаимосвязи предложения и цены в момент времени t), причем $\partial S/\partial P > 0$.

Предположим, что уравнение (16) имеет единственное положение равновесия $S^* > 0$ и $P^* > 0$. Обозначим $(\partial D/\partial P)(P^*) = -a$, $(\partial S/\partial P)(P^*) = b$.

Линейное однородное уравнение первого приближения имеет вид

$$Tb\dot{x}(t) + bx([t/T]T) + ax(t) = 0,\; t \geq 0, \quad (17)$$

где $x = S - S^*$ – отклонение предложения S от от равновесного предложения (положения равновесия) S^*. В примере 3.4 установлено, что тривиальное решение уравнения (17) экспоненциально устойчиво. Тогда из работ А.И.Башкирова (см., например, [6, 7]) следует, что функция Коши этого уравнения [1] имеет экспоненциальную оценку с отрицательным показателем. Отсюда следует C – устойчивость уравнения (17). А значит, в силу теоремы 4 из статьи [2] уравнение (16) локально C – устойчиво в окрестности положения равновесия.

Список литературы

1. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Сер. Математика. 1997. № 6 (421). С. 3-16.

2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом. II // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2000. № 4 (455). С. 3-13.

3. *Аллен Р.* Математическая экономия. М.: ИЛ, 1963. 668 с.

4. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 294 с.

5. *Багриновский К.А., Матюшок В.М.* Экономико-математические методы и модели (микроэкономика). Изд. 2-е, переб. и доп. М.: Изд-во РУДН, 2006. 221 с.

6. *Башкиров А.И.* К вопросу об устойчивости уравнения с последействием с периодическими параметрами / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1983. 19 с.

7. *Башкиров А.И.* Признак экспоненциальной устойчивости уравнения с последействием и с периодическими параметрами // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1994-1997.

8. *Бергстром А.Р.* Построение и применение математических моделей. М.: Прогресс, 1970. 176 с.

9. *Гаврилец Ю.Н., Карташева А.В.* Модель формирования связанных установок при активном участии индивидов // Мат. и компьютер. моделирирование соц.-экон. процессов: сб. ст. / под. ред. Ю.Н.Гаврильца; ЦЭМИ РАН. М., 1997. С. 8-26.

10. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика, 1985. 240 с.

11. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

12. *Домошницкий А.И.* Возрастание вронскиана и свойства решений уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Пермь, 1983. 9 с.

13. *Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

14. *Занг В.Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999. 336 с.

15. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 839 с.

16. *Китайгородский В.И., Котов В.В.* Моделирование экономического развития с учетом замещения невозобновляемых энергетических ресурсов. М.: Наука, 1990. 166 с.

17. *Кобринский Н.Е., Кузьмин В.И.* Точность экономико-математических моделей. М.: Финансы и статистика, 1981. 256 с.

18. *Ковалев Д.А.* Компьютерный анализ динамики установки с запаздыванием // Мат. и компьютер. моделир. социально-эконом. процессов: сб. ст. / под. ред. Ю.Н.Гаврильца. ЦЭМИ РАН. М., 1997. С. 27-32.

19. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. 3-е стереотип. изд., М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 400 с.

20. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 248 с.

21. *Ланкастер К.* Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972. 464 с.

22. *Неймарк Ю.И., Островский А.В.* Дифференциальные экономические модели типа Самуэльсона // Вестн. ННГУ. Сер.: Мат. моделирование и оптим. управление. Н.Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та, 1999. Вып. 1 (20). С. 123-129.

23. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 519 с.

24. *Основы* теории оптимального управления / под ред. В.Ф.Кротова. М.: Высш. шк., 1990. 432 с.

25. *Симонов П.М.* Теоремы об устойчивости обобщенных линейных периодических уравнений // Функцион.-дифференц. уравнения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1986. С. 23-26.

26. *Симонов П.М.* О некоторых динамических моделях микроэкономики // Вестн. ПГТУ. Математика и прикладная математика / Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 2002. С. 106-116.

27. *Симонов П.М.* Исследование устойчивости решений некоторых динамических моделей микро- и макроэкономики // Вестн. Пермского ун-та. Математика. Информатика. Механика / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2003. С. 88-93.

28. *Титов Н.И., Успенский В.К.* Моделирование систем с запаздыванием. Л.: Энергия, 1969. 97 с.

29. *Шешукова Т.Г., Сергеева Н.В.* Формирование системы показателей для оценки эффективности научной деятельности // Экономический анализ: теория и практика. 2012. № 4. С. 53-63.

30. *Agarwal R., Bohner M., Domoshnitsky A., Goltser Y.* Floquet theory and stability of nonlinear integro-differential equations // Acta Math. Hungar. 2005. Vol. 109, № 4. P. 305-330.

31. *Dorroh J.R., Ferreyra G.* A Multistate, multicontrol problem with unbounded controls // SIAM J. Contr. and Optim. 1994. Vol. 32, № 5. P. 1322-1331.

32. *Kalecki M.* On macrodynamic theory on bisness cycle // Econometrica. 1935. Vol. 3. P. 327-344.

33. *Samuelson P.A.* The stability of equilibrium comparative statics and dymanic // Econometrica. 1941. Vol. 9. P. 97-120.

34. *Sethi S.P., Thomson G.I.* Optimal control theory. Application to management science. USA. Boston, 1981. 370 p.