

РАЗДЕЛ IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

УДК 330.4

РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ ОДНОПРОДУКТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ В УСЛОВИЯХ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ОПИСАНИЯ СРЕДЫ

Р.А. Файзрахманов, д. экон. наук, проф., зав. кафедрой информационных технологий и автоматизированных систем

Электронный адрес: fayzrakhmanov@gmail.com

О.С. Скирюк, асп. кафедры информационных технологий и автоматизированных систем

Пермский государственный национальный исследовательский политехнический университет, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29

Электронный адрес: skiryuk@inbox.ru

В статье рассмотрены разработанные авторами однопродуктовые динамические детерминированные модели оптимальной производственной программы в классе задач математического программирования. Акцентируется внимание на важности применения таких моделей для промышленных предприятий, приведен пример их построения для кирпичного производства.

Ключевые слова: экономико-математическая модель; детерминированная динамическая модель; производственная программа; сезонность продаж; производственная мощность.

Введение

Основным процессом производственного планирования на тактическом уровне является формирование производственной программы, отражающей ассортимент и объемы продукции, подлежащей выпуску в плановом периоде, с учетом имеющихся резервов и возможностей предприятия.

В процессе формирования программы должны учитываться действующие и планируемые производственные мощности, потребности в материалах, стратегии потенциальных поставщиков в отношении цен и объемов производства, стратегии снабжения и т.д. При этом производственная программа является интегрирующим, связующим этапом в планировании, на этом этапе от принятых решений напрямую зависят следование общей стратегии предприятия, прибыль, ассортимент выпускаемой продукции. Формирование производственной программы является сложным процессом, требующим комплексного

подхода. В связи с особенностями маркетинговой программы, имеющихся ресурсов, потребностей в ресурсах может быть множество производственных программ, эффективность при реализации которых будет разной. Поэтому становится актуальной задача выбора наиболее оптимальной программы по некоторому критерию, определяемому исходя из цели и общей стратегии предприятия.

Сформированная оптимальная производственная программа предприятия служит необходимой информационной основой для решения задач в других разделах бизнес-плана, в частности финансового плана [8]. Наиболее удобным и эффективным методом поиска оптимальной производственной программы является моделирование, что дает возможность проигрывания различных сценариев при изменении параметров объекта, анализе различных стратегий и выборе наилучшей.

Исследования в области формирования оптимальной производственной программы

начались в 30-х гг. с работ Л.В. Канторовича, который впервые предложил математическую постановку производственных задач оптимального планирования и эффективные методы их решения, приемы их экономического анализа. Дальнейшее развитие и обобщение теории оптимального планирования и управления производством на основе экономико-математических методов получила в работах А.А. Первозванского, А.В. Пархоменко, Б.И. Герасимова, А.В. Мищенко и др.

В работе А.А. Первозванского «Математические модели в управлении производством» [3] разработаны различные типы моделей формирования производственной программы. Построенные модели не позволяют получить оптимальную программу производства при сезонности спроса в связи с накоплением к концу периода планирования нереализованных остатков либо при нехватке готовой продукции для удовлетворения спроса. Это приводит к росту издержек, нерациональному производству и вследствие этого к снижению эффективности производства.

В работах А.В. Архипова, Р.А. Файзрахманова, А.П. Косякова исследованы проблемы моделирования и управления материальными потоками в производственных системах, построены и проанализированы комплексные модели планирования производства и управления запасами. Модели построены с учетом одной стратегии – закупки сырья партиями оптимального объема и без учета возможности производства дополнительного объема продукции в ранние периоды с целью удовлетворения спроса в более поздние периоды, когда производственных мощностей недостаточно [6]. Но именно проработка этих вопросов позволяет создать гибкую и эффективную модель формирования производственной программы.

Т.Г. Шешукова рассматривает понятие и эволюцию коммерческого расчета как одного из методов управления, направленного на обеспечение прибыльности предприятия. Важным принципом коммерческого расчета является соизмерение затрат и результатов, раскрывающих финансовую сторону производственной программы [9].

Среди зарубежных ученых, занимавшихся разработкой положений в области планирования производства на предприятии, можно отметить труды М. Мескона, М. Альберта, Ф. Хедоури, Дж. Стивенсона.

В работе М. Мескона, М. Альберта, Ф. Хедоури [2] рассматриваются и анализируются чистые и смешанные стратегии производства, но не рассматриваются вопросы использования

различных стратегий в моделях оптимального планирования производственной программы.

Изучение работ отечественных и зарубежных ученых позволяет сделать вывод, что вопросы построения комплексных моделей производства исследованы недостаточно. Вопрос о производстве дополнительного объема продукции с целью выполнения плана продаж в случае недостаточной мощности при сезонности продаж в моделях формирования производственной программы не рассматривается. Учет данного фактора способствует эффективности и обеспечению слаженности производства, увеличению прибыли и сокращению производственных затрат.

В данной работе предложены модели формирования оптимальной производственной программы для предприятия, объединяющие процессы производства и закупок с учетом ограничения по производственной мощности, сезонности продаж, издержек от управления запасами. Рассмотрен принцип построения моделей для двух стратегий закупок: периодические закупки и закупки партиями фиксированного объема.

Постановка задачи

Найти оптимальные объемы выпуска продукции x_i , $i = \overline{1, n}$ и сырья λx_i , $i = \overline{1, n}$, максимизирующие прибыль предприятия при следующих данных и предположениях:

- предприятие производит по одной технологии продукцию одного вида, для производства которой требуется один вид сырья; продукция и сырье не подвергаются естественной убыли;
- продажи производятся в конце каждого месяца;
- известны месячные значения ожидаемых продаж d_i , $i = \overline{1, n}$; месячные номинальные производственные мощности m_i , $i = \overline{1, n}$;
- закупка сырья производится по одной из двух стратегий (стратегия периодических закупок, стратегия закупки фиксированного объема);
- известен технологический коэффициент λ , показывающий объем необходимого сырья на единицу готовой продукции; оптовая цена p^{prod} продажи единицы продукции; цена $p^{зак.с}$ закупки сырья у поставщика; цена $p^{тр}$ транспортировки, отгрузки единицы сырья поставщиком;

- известны: стоимость $C^{труд}$ труда, затраченного рабочим коллективом на производство единицы продукции; месячная стоимость C_h^c хранения единицы сырья на складе; месячная стоимость C_h^{zom} хранения единицы готовой продукции на складе; затраты C^3 на выполнение одного заказа у поставщика; переменные производственные затраты $C^{перемпр}$ на единицу продукции; производственные издержки $C^{пост}$ (эксплуатация оборудования, аренда помещения, коммунальные расходы и т.д.); остатки готовой продукции z_0^{zom} на начало планового периода;

- остатки сырья на начало планового периода считаем равными нулю.

Построение модели

Построим модель в классе задач математического программирования. В качестве целевого функционала рассмотрим прибыль предприятия. Прибыль предприятия определяется соотношением:

$\Pi = TR - C^{пост} - C^{перем}$, где TR - выручка от реализации продукции за весь период планирования; $C^{пост}$ - постоянные затраты; $C^{перем}$ - переменные затраты.

Построение и анализ модели произведем при использовании двух основных стратегий закупки: периодических закупок и закупки фиксированного объема. Вопросы о выборе наиболее эффективной стратегии с точки зрения минимизации затрат исследованы нами в работе [7].

1. *Стратегия периодических закупок.* При этой стратегии закупки сырья осуществляются через одинаковые промежутки времени. При построении данной модели будем считать, что закупки происходят раз в месяц.

Определим составляющие прибыли:

$$TR = p^{прод} \sum_{i=1}^n d_i - p^{прод} \left(\sum_{i=1}^n (d_i - x_i) - z_0^{zom} \right) = p^{прод} \left(\sum_{i=1}^n x_i + z_0^{zom} \right); \quad (1)$$

$$C^{перем} = \left(C^{перем.пр.} + C^{труд} \right) \cdot \sum_{i=1}^n x_i + C^{зак.с.} + C^{пз.с.} + C^{хр.с.} + C^{хр.з.}; \quad (2)$$

$$C^{зак.с.} = p^{зак.с.} \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i; \quad (3)$$

$$C^{пз.с.} = n \cdot C^3 + p^{мп.} \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i; \quad (4)$$

$$C^{хр.с.} = C_h^c \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda x_i}{2} \right); \quad (5)$$

$$C^{хр.з.} = C_h^{zom} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{zom}}{2} \right). \quad (6)$$

Подставив полученные выражения в целевую функцию прибыли, получим в окончательном виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \Pi &= p^{прод} \left(\sum_{i=1}^n x_i + z_0^{zom} \right) - \left(C^{перем.пр.} + C^{труд} \right) \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \\ &- \left(p^{зак.с.} + p^{мп.} \right) \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot C^3 - C^{пост} - \\ &- C_h^c \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda x_i}{2} \right) - C_h^{zom} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{zom}}{2} \right) \rightarrow \max; \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$x_i \geq \min(d_i, m_i); \quad x_i \leq m_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (8)$$

$$z_i^{zom} + \sum_{j=i}^n x_j \leq \sum_{j=i}^n d_j;$$

$$z_i^{zom} \geq z_0^{zom} + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - d_j);$$

$$z_i^{zom} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (9)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Ограничения (8) показывают производство продукции в объемах x_i не ниже ожидаемых объемов продаж d_i и не выше производственных мощностей m_i .

Производство продукции в объемах больше d_i позволяет создать запас для использования его в том случае, когда уровень производства ниже ожидаемых продаж. Ограничения (9) задают схему использования запасов готовой продукции.

2. *Стратегия закупки фиксированного объема.* При этой стратегии закупки производятся партиями q . Определим составляющие прибыли:

$$TR = p^{прод} \sum_{i=1}^n d_i - p^{прод} \left(\sum_{i=1}^n (d_i - x_i) - z_0^{zom} \right) =$$

$$= p^{прод} \left(\sum_{i=1}^n x_i + z_0^{zom} \right); \quad (11)$$

$$C_{перем} = (C_{перем.пр} + C_{труд}) \cdot \sum_{i=1}^n x_i + C_{зак.с} +$$

$$+ C^{нз.с} + C^{хр.с} + C^{хр.з}; \quad (12)$$

$$C^{зак.с} = p^{зак.с} \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i; \quad (13)$$

$$C^{нз.с} = \frac{\lambda \sum_{i=1}^n x_i}{q} \cdot C^3 + p^{мп} \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i \quad (14)$$

$$C^{хр.с} = C_h^c \cdot \frac{q}{2} n; \quad (15)$$

$$C^{хр.з} = C_h^{zom} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{zom}}{2} \right). \quad (16)$$

При расчете затрат на хранение сырья (15) и готовой продукции (16) использовано предположение о равномерном расходе запасов сырья и производства готовой продукции [5].

Подставив полученные выражения в целевую функцию прибыли, получим модель вида:

$$\left\{ \begin{aligned} \Pi &= p^{прод} \left(\sum_{i=1}^n x_i + z_0^{zom} \right) - C^{пост} - (C_{перем.пр} + C_{труд}) \cdot \sum_{i=1}^n x_i - p^{зак.с} \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\lambda \sum_{i=1}^n x_i}{q} \cdot C^3 - \\ &- p^{мп} \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i - C_h^c \cdot \frac{q}{2} n - C_h^{zom} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{zom}}{2} \right) \rightarrow \max; \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$$x_i \geq \min(d_i, m_i); \quad x_i \leq m_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (18)$$

$$z_i^{zom} + \sum_{j=i}^n x_j \leq \sum_{j=i}^n d_j \quad z_i^{zom} \geq z_0^{zom} + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - d_j);$$

$$z_i^{zom} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (19)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Размер партии q может задаваться произвольно, например с учетом политики поставщика. В качестве значения q может использоваться оптимальное значение. Наиболее известной формулой вычисления оптимального значения q является формула

Уилсона (формула EOQ) [4]:

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot C^3 \cdot \lambda \sum_{i=1}^n x_i}{C_h^c \cdot n}}. \quad (21)$$

При использовании этой формулы модель становится нелинейной. Для сохранения линейности предлагаем формулу

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot C^3 \cdot \lambda \sum_{i=1}^n d_i}{C_h^c \cdot n}}. \quad (22)$$

Исследование и сравнение целевых функционалов в моделях (7) – (10) и (17) – (20) позволяет получить условие совпадения моделей и их максимумов:

$$nC^3 + C_h^c \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda x_i}{2} \right) = \frac{\lambda \sum_{i=1}^n x_i}{q} C^3 + C_h^c \frac{q}{2} n$$

$$\Rightarrow q = \frac{\lambda \sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (23)$$

Разница между максимумами моделей будет определяться выражением:

$$\left| nC^3 + C_h^c \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda x_i}{2} \right) - \frac{\lambda \sum_{i=1}^n x_i}{q} C^3 - C_h^c \frac{q}{2} n \right|. \quad (24)$$

Расчеты по формулам (23), (24) позволяют получить количественную оценку разницы в прибыли.

Построенные модели позволяют сформировать оптимальную производственную программу при заданных объемах продаж, значениях производственных мощностей, запасах готовой продукции, затратах, стратегиях закупок с учетом сезонности продаж.

Пример построения однопродуктовой динамической детерминированной модели производства керамического кирпича

Стратегия периодических закупок

В соответствии с постановкой произведем построение модели при следующих параметрах:

$$n = 12 \text{ мес.}; \quad z_0^z = 0; \quad \lambda = 2,5 \text{ кг};$$

$$q = 200000 \text{ кг};$$

$$C_{аренда} = 1000 \text{ кв.м} \cdot 320 \text{ руб. кв.м} \cdot 12 \text{ мес.} =$$

$$= 3840000 \text{ руб. год.};$$

$$\begin{aligned}
 C^{эл.эн} &= 15 \text{ кВт} / \text{ч} \cdot 240 \text{ ч} \cdot 3 \text{ руб. кВт} / \text{ч} \cdot 12 \text{ мес.} = \\
 &= 129600 \text{ руб. год.}; \\
 C^{аморт} &= 1000000 \text{ руб.} \cdot 0,05 = 50000 \text{ руб. год.}; \\
 C^{пост} &= C^{аренда} + C^{эл.эн} + C^{аморт} = \\
 &= 3840000 + 129600 + 50000 = 4019600 \text{ руб. год.}; \\
 C^{перемпр} &= 0,25 \text{ кВт} / \text{ч} \cdot 3 \text{ руб. кВт} / \text{ч} + \\
 &+ 0,0002 \text{ куб. м} \cdot 25 \text{ руб. куб. м.} = 0,755 \text{ руб. ед.}; \\
 C^{мруд} &= 0,85 \text{ руб.} \cdot C_h^c = 0,03 \text{ руб. ед. д.}; \\
 C_h^z &= 0,02 \text{ руб. ед. д.}; C^3 = 5 \text{ руб.}; \\
 p^{мп} &= 0,1 \text{ руб. кг.}; p^{прод} = 8 \text{ руб. ед.}; \\
 p^{зак.с} &= 0,3 \text{ руб. кг.}
 \end{aligned}$$

Подставив параметры, получаем следующие модели:

Стратегия периодических закупок:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\Pi = 8 \cdot \sum_{i=1}^{12} x_i - 4019660 - 2,605 \cdot \sum_{i=1}^{12} x_i - 0,03 \cdot \\
 &\cdot \sum_{i=1}^{12} (1,25 x_i) - 0,02 \cdot \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{zom}}{2} \right) \rightarrow \max; \\
 &\text{Стратегия закупки фиксированного} \\
 &\text{объема:} \\
 &x_i \geq \min(d_i, m_i); x_i \leq m_i, i = \overline{1,12}; \\
 &z_i^{zom} + \sum_{j=i}^{12} x_j \leq \sum_{j=i}^{12} d_j; z_i^{zom} \geq \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - d_j); \\
 &z_i^{zom} \geq 0, i = \overline{1,12}; \\
 &x_i \geq 0, i = \overline{1,12};
 \end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\Pi = 8 \cdot \sum_{i=1}^{12} x_i - 4019600 - 2,605 \cdot \sum_{i=1}^{12} x_i - \\
 &- \frac{12,5 \sum_{i=1}^{12} x_i}{200000} - 0,03 \cdot 100000 \cdot 12 - 0,02 \cdot \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{x_i + z_{i-1}^{zom}}{2} \right) \rightarrow \\
 &\rightarrow \max; \\
 &x_i \geq \min(d_i, m_i); x_i \leq m_i, i = \overline{1,12}; \\
 &z_i^{zom} + \sum_{j=i}^{12} x_j \leq \sum_{j=i}^{12} d_j; z_i^{zom} \geq \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - d_j); \\
 &z_i^{zom} \geq 0, i = \overline{1,12}; \\
 &x_i \geq 0, i = \overline{1,12}.
 \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Проанализируем задачи при различных значениях m_i по показателям прибыли и ритмичности производства. Сравним результаты с вариантом производства по среднему значению продаж

$$x_i = \sum_{j=1}^{12} d_j / 12, i = \overline{1,12}.$$

Стратегия периодических закупок

Результаты расчетов модели (25) приведены в табл. 1 – 4.

Таблица 1

Программа производства по среднему значению продаж

x_i	y_i	d_i	m_i
119000	297500	114000	119000
119000	297500	115000	119000
119000	297500	117000	119000
119000	297500	120000	119000
119000	297500	122000	119000
119000	297500	123000	119000
119000	297500	124000	119000
119000	297500	123000	119000
119000	297500	120000	119000
119000	297500	118000	119000
119000	297500	118000	119000
119000	297500	118000	119000
Прибыль: 3 592 090 руб.			



Таблица 2

Программа производства по значениям модели (25)

x_i	y_i	d_i	m_i
119000	297500	114000	119000
119000	297500	115000	119000
119000	297500	117000	119000
119000	297500	120000	119000
119000	297500	122000	119000
119000	297500	123000	119000
119000	297500	124000	119000
119000	297500	123000	119000
119000	297500	120000	119000
118000	295000	118000	119000
118000	295000	118000	119000
118000	295000	118000	119000
Прибыль: 3 600 077,5 руб.			

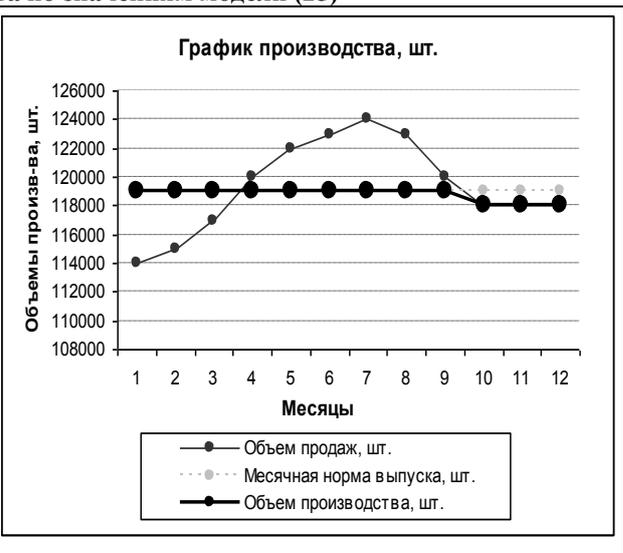


Таблица 3

Программа производства по среднему значению продаж в случае повышения производственной мощности

x_i	y_i	d_i	m_i
119333	298333	114000	120000
119333	298333	115000	120000
119333	298333	117000	120000
119333	298333	120000	120000
119333	298333	122000	120000
119333	298333	123000	120000
119333	298333	124000	120000
119333	298333	123000	120000
119333	298333	120000	120000
119333	298333	118000	120000
119333	298333	118000	120000
119333	298333	118000	120000

Прибыль: 3 533 383,38 руб.

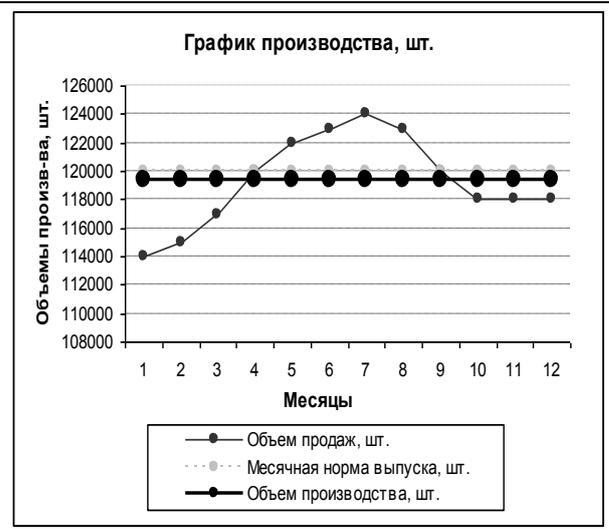
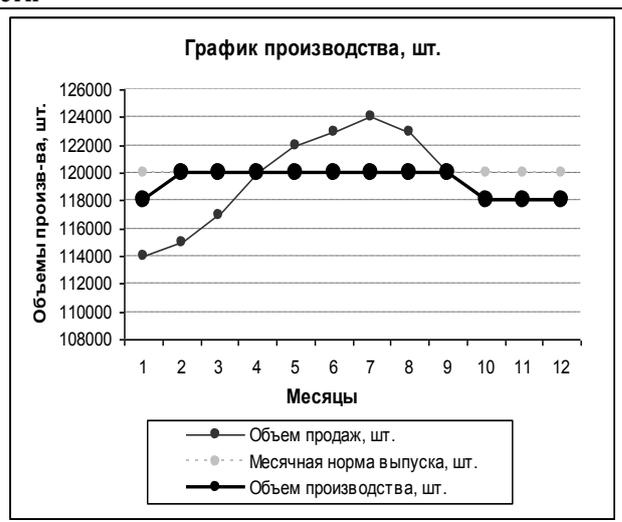


Таблица 4

Программа производства по значениям модели (25) в случае повышения производственной мощности

x_i	y_i	d_i	m_i
118000	295000	114000	120000
120000	300000	115000	120000
120000	300000	117000	120000
120000	300000	120000	120000
120000	300000	122000	120000
120000	300000	123000	120000
120000	300000	124000	120000
120000	300000	123000	120000
120000	300000	120000	120000
118000	295000	118000	120000
118000	295000	118000	120000
118000	295000	118000	120000

Прибыль: 3 637 390 руб.



Анализ результатов показывает, что в первом случае (табл. 1) получаемая предприятием прибыль меньше и к концу периода планирования накапливаются остатки нереализованной продукции.

Анализ и сравнение результатов в табл. 2, 4 позволяет сделать вывод, что за счет увеличения производственных мощностей прибыль увеличилась. С другой стороны, с ростом производственных мощностей увеличивается их недогрузка, что может негативно сказаться на эффективности работы предприятия. По данным табл. 4 (ср. те же данные в табл. 3) выпуск дополнительного объема продукции в первые три месяца

происходит ровно в том объеме, который необходим для покрытия дефицита с 5-го по 8-й месяц, что позволяет избежать хранения излишних запасов на складе и увеличить прибыль. При дальнейшем увеличении мощностей тенденция к их недогрузке и снижению равномерности производства будет расти.

Стратегия закупки фиксированного объема

Результаты расчетов модели (26) приведены в табл. 5 – 7.

Список литературы

1. *Архипов А.В., Файзрахманов Р.А.* Модель определения оптимальной производственной программы для непостоянного спроса с учетом дискретного изменения мощностей предприятия // Экономика и финансы. 2005. №11. С. 83 – 86.
2. *Мескон М., Альберт М., Хедоури Ф.* Основы менеджмента. М.: Дело, 1997. 704 с.
3. *Первозванский А.А.* Математические модели в управлении производством. М., 1975. 616 с.
4. *Стерлигова А.Н.* Управление запасами в цепях поставок. М.: ИНФРА-М, 2008. 430 с.
5. *Файзрахманов Р.А.* Моделирование и управление материальными потоками производственной системы с учетом факторов неопределенности и риска / Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 2002. 180 с.
6. *Файзрахманов Р.А., Косяков А.П.* Разработка модели планирования и бюджетирования на примере предприятия отрасли индивидуального деревянного домостроения ООО ПСК "Усадьба" // Вестник Перм. ун-та. Сер. Экономика. 2009. Вып. 4(30). С. 70 – 77.
7. *Файзрахманов Р.А., Скирюк О.С.* Метод определения эффективности стратегий закупок с учетом возможностей предприятия на основе расчета затрат, связанных с запасами // Вестник ПГТУ. 2010. №4. С. 148 – 155.
8. *Царев В.В.* Внутрифирменное планирование. СПб.: Питер, 2002. 496 с.
9. *Шешукова Т.Г.* Научные основы коммерческого расчета на предприятии // Вестник Перм. ун-та. Сер. Экономика. 2010. Вып. 1(4). С. 17-28.