

УДК 658

ЦЕЛЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ РАЗВИТИЯ ТЕКСТИЛЬНО-ШВЕЙНОЙ ОТРАСЛИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ¹

Д.Л. Андрианов, д. физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой информационных систем и математических методов в экономике

Электронный адрес: adl@prognoz.ru

Д.А. Поносов, асп. кафедры информационных систем и математических методов в экономике

Электронный адрес: dponosov@gmail.com

А.А. Поносов, соискатель кафедры информационных систем и математических методов в экономике

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Электронный адрес: ponosovaa@prognoz.ru

Строится линейная разностная модель развития текстильно-швейной отрасли РФ. Ставится задача оптимального управления ею. Задача оптимального управления исследуется на разрешимость. В случае противоречивости построенной динамической модели рассматривается возможность ее коррекции на основе подхода, предложенного для статических моделей академиком И.И. Ереминым.

Ключевые слова: задача оптимального управления; коррекция; линейная разностная модель; несовместная система; противоречивая модель.

1. Общий вид модели

Устойчивость – главное условие эффективного функционирования государства. В настоящей работе под устойчивостью понимается (см. [12]) защищенность человека, общества и страны в целом от опасного воздействия важнейших отрицательных факторов, наносящих ущерб здоровью и самой жизни людей, экономике, механизмам государственного управления и окружающей среде. В зависимости от факторов влияния и объектов воздействия устойчивость может пониматься с военной, социально-экономической, продовольственной, энергетической, экологической, ресурсной, управленческой, информационной точек зрения.

Рассматривая социально-экономический аспект устойчивости, нельзя не отметить упущений в развитии текстильно-швейной отрасли Российской Федерации, поскольку на 2010 г. доля отечественной продукции на внутреннем рынке в стоимостном выражении не превышает 15%, а в натуральном – 20% [8, 9, 13]. Таким образом, в случае разрыва внешнеэкономических связей, при сокращении импорта наше государство не сможет должным образом обеспечить спрос на продукцию данной отрасли.

Для сокращения сложившейся диспропорции правительству РФ в рамках доступных рычагов управления необходимо стимулировать развитие текстильно-швейной отрасли. Возникает задача целевого управления процессом развития текстильно-швейной отрасли РФ. Для данной задачи в работе строится линейная разностная модель с последствием.

Пусть $J = \{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\mu = T$ – множество моментов времени, в которые наблюдаются показатели экономического субъекта и в которые возможно осуществление управления; T – период управления моделью; $x(t_i) \in R^n$, $i = 1, 2, \dots, \mu$ – вектор-столбец фазовых переменных, характеризующих состояние экономического субъекта в момент времени t_i ; $u(t_i) \in R^r$, $i = 1, 2, \dots, \mu$ – вектор-столбец управляющих переменных в момент времени t_i , с помощью данного управления осуществляется воздействие на динамику фазовых переменных.

Будем строить модель текстильно-швейной отрасли в виде линейной разностной модели с последствием. Выбор типа модели ориентирован на опыт и разработки компании «Прогноз» [1]. Компанией разработана

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ №10-01-96054) и компании «Прогноз».

макромодель экономики Российской Федерации, включающая в качестве подсистем линейные разностные модели отраслей. Предлагаемая здесь модель может использоваться в качестве одной из таких подсистем. В общем случае линейная разностная модель включает следующие компоненты:

- Система уравнений динамики, определяющая взаимосвязи фазовых и управляющих переменных:

$$x(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x(t_j) + \sum_{j=1}^i B_{ij} u(t_j) + g(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, \mu, \quad (1)$$

где $A_{ij}, j = \overline{0, i-1}, i = \overline{1, \mu} - (n \times n)$ – матрицы,

$B_{ij}, j = \overline{1, i}, i = \overline{1, \mu} - (n \times r)$ – матрицы,

$g(t_i) \in R^n$.

- Начальные значения фазовых переменных:

$$x(t_0) = \alpha \in R^n. \quad (2)$$

- Линейные ограничения на значения фазовых и управляющих переменных:

$$\sum_{i=1}^{\mu} \tilde{A}_i x(t_i) + \sum_{j=1}^{\mu} \tilde{I}_j u(t_j) \leq \gamma \in R^N, \quad (3)$$

где $\tilde{A}_i, i = \overline{1, \mu} -$ постоянные $(N \times n)$ – матрицы,

$\tilde{I}_j, j = \overline{1, \mu} -$ постоянные $(N \times r)$ – матрицы.

В виде выражения (3) представимы, например, следующие ограничения:

1. Точечные условия: $x(t_i) = \gamma_i$. Например, терминальное состояние $x(T) = \gamma_{\mu}$.

2. Балансовые ограничения:

$$x_{i_1}(t_j) + x_{i_2}(t_j) + \dots + x_{i_k}(t_j) = x_{i_m}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \mu.$$

3. «Интегральные» ограничения:

$$\sum_{i=1}^{\mu} x(t_i) = \gamma_I, \quad \text{где } \gamma_I \in R.$$

4. Допустимые интервалы изменения переменных: $\underline{u}(t_i) \leq u(t_i) \leq \bar{u}(t_i)$.

5. Ограничения на динамику показателя:

$$x_i(t_j) \leq x_i(t_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, \mu - 1.$$

2. Постановка задачи оптимального управления для линейной разностной модели

Модель (1) – (3) определяет динамику системы в зависимости от выбранного управления с учетом ограничений на изменение фазовых и управляющих переменных. На практике для выбора «хорошего» управления зачастую используется сценарный подход. В настоящей работе ставится задача поиска оптимального управления в строгом смысле.

Поиск оптимального управления возможен лишь в рамках некоторого критерия. Поэтому к модели (1) – (3) добавляется целевой функционал, по которому определяется

эффективность того или иного управления. В линейном случае функционал запишется в виде

$$Z = \sum_{i=1}^{\mu} c_i x(t_i) + \sum_{j=1}^{\mu} d_j u(t_j), \quad (4)$$

где $c_i, i = \overline{1, \mu}$ – вектор-строки размерности n ; $d_j, j = \overline{1, \mu}$ – вектор-строки размерности r .

Таким образом, ставится задача поиска управления, удовлетворяющего ограничениям (1) – (3) и максимизирующего линейный функционал (4).

3. Построение модели развития текстильно-швейной отрасли РФ

Конкретная эконометрическая модель развития текстильной и швейной отрасли Российской Федерации построена с помощью стандартных эконометрических процедур АК «Прогноз-5» [1] и «Eviews-5» на основе квартальных данных Росстата с 1-го квартала 2005 г. по 4-й квартал 2009 г. и долгосрочной программы развития легкой промышленности РФ [13].

На этапе формализации в качестве фазовых переменных, описывающих текстильно-швейную отрасль РФ, рассматривались следующие показатели: индекс промышленного производства/объем отгруженной продукции, инвестиции в основной капитал, импорт и экспорт продукции отрасли, дефлятор промышленного производства, индекс цен производителей (ИЦП), кредиторская и дебиторская задолженность предприятий и себестоимость. Список управляющих переменных включал ставки и тарифы, регулируемые правительством, уровень инфляции, объем денежной массы и курсы валют. Экзогенные переменные были представлены показателями уровня жизни населения в РФ, индексами мировых цен и интернациональными показателями. Поскольку управляющие и экзогенные переменные в номинальном выражении в разы меньше эндогенных, то при моделировании были использованы реальные (относительные) значения всех показателей. Применение относительных показателей также позволило устранить влияние сезонности и автокорреляции.

Исходя из того, что индекс промышленного производства (ИПП) является определяющим показателем развития отрасли, модель данной фазовой переменной была принята за основу. На первом этапе строится модель для данного показателя. На последующих этапах строятся модели всех эндогенных для модели переменных, входящих в первую модель в качестве объясняющих.

Для определения прироста объема отгруженной продукции был определен

перечень факторов, от которых может зависеть ИПП текстильно-швейной отрасли РФ. Анализ со сторон спроса и предложения показал, что значимыми могут оказаться следующие факторы: себестоимость продукции, тарифы грузоперевозок, дефлятор, загруженность мощностей, инфляция, экспорт, инвестиции, импорт, доходы населения, расходы населения на товары легкой промышленности и ИПП в предыдущие моменты времени.

В ходе априорного анализа парных взаимосвязей ИПП и указанных выше факторов было установлено, что себестоимость продукции, тарифы на грузоперевозки, экспорт и показатели уровня жизни населения не оказывают должного влияния на ИПП текстильно-швейной продукции. А доступные статистические данные по загруженности мощностей указывают на отрицательную связь данного показателя с ИПП, что расходится с экономическим смыслом.

Таким образом, была установлена следующая линейная функциональная связь между ИПП и следующими показателями: инвестициями, дефлятором, уровнем инфляции, импортом и ИПП в предыдущие моменты времени.

Положительное влияние на динамику ИПП оказывают инвестиции и значение ИПП в предыдущие моменты времени. Все остальные показатели – отрицательное.

Далее при совместном анализе влияния выявленных факторов на ИПП с учетом экономического смысла и t -статистики был установлен лаг по каждому показателю. Например, оптимальный лаг для инвестиций в текстильную отрасль оказался равным 1 кварталу, т.е. в текстильно-швейной отрасли отдача от вложенных средств наступает примерно через 1-3 месяца. Дефлятор, инфляция и импорт наиболее значимы без запаздывания и при запаздывании, равном 1. То есть производители, составляя план выработки продукции на квартал, ориентируются на загруженность рынка и уровень цен в предыдущий и текущий моменты времени.

Как уже было отмечено ранее, чтобы отразить обратную зависимость ИПП текстильно-швейной отрасли РФ от цен, в модель был введен соответствующий дефлятор. Предполагалось, что на данный показатель оказывают влияние следующие факторы: уровень жизни населения (расходы/доходы населения), экспорт, импорт, денежная масса, инвестиции, себестоимость, ИЦП данной отрасли, различные тарифы (грузоперевозки, электроэнергия и др.), цены на ресурсы (шерсть, хлопок). В ходе исследования было установлено, что такие показатели, как экспорт, себестоимость и показатели уровня жизни

населения являются малозначимыми при построении модели дефлятора. А показатель «денежная масса» (M2) сильно коррелирует с фактором инвестиции, в связи с чем его пришлось исключить для того, чтобы избавиться от мультиколлинеарности.

Таким образом, была установлена линейная зависимость дефлятора промышленного производства от импорта продукции, ИЦП текстильно-швейного производства, индекса мировых цен на шерсть и индексов тарифов на грузовые перевозки и электроэнергию.

Так как дефлятор отвечает за рост цен изучаемой отрасли, то на него оказывают положительное влияние: ИЦП текстильно-швейного производства, индекс мировых цен на шерсть и индексы тарифов на грузовые перевозки и электроэнергию. Отрицательное влияние оказывает импорт продукции, поскольку для того, чтобы отечественная продукция оставалась более конкурентоспособной, производителям необходимо снижать цены.

При моделировании инвестиций в отрасль была предпринята попытка учесть следующие зависимости между инвестициями и рядом факторов: ИПП отрасли, процентная ставка, ставка по кредитам, ставка резервирования, денежная масса, индекс цен в капитальном строительстве, ставка процента (мировая), сумма прибыли, себестоимость, основные средства, кредиторская задолженность предприятий, загруженность мощностей и ИЦП текстильно-швейной отрасли.

В ходе проведенного анализа было установлено, что значимыми являются факторы: импорт продукции отрасли, ИПП, инвестиции в предыдущие моменты времени, показатель уровня жизни населения (доходы), ставки по рублевым депозитам и рефинансирования, а также денежная масса.

Так как отдача от вложенных инвестиций наступает с запаздыванием (согласно уже построенной модели) и инвесторы заинтересованы вкладывать только в том случае, если их устраивает доходность, то модель инвестиции строилась исходя из следующих предпосылок: вложенные денежные средства 7-9 месяцев назад дадут отдачу в течение 1-5 последующих месяцев, что позволит определить реальную доходность вложений и тем самым определить величину новых вливаний в производство. Другими словами, лаг у инвестиции был определен как 3, индекс промышленного производства запаздывает на величину 2, а такие показатели, как доходы населения, ставки рефинансирования, ставка по депозитам и

денежная масса действуют непосредственно в текущий момент времени.

Положительное влияние оказывают факторы: ИПП, инвестиции в предыдущий момент времени, ставка рефинансирования (чем она больше, тем меньше банки заинтересованы в выдаче потребительских кредитов и тем больше они ориентируются на реальный сектор), денежная масса.

Отрицательное влияние оказывают факторы: импорт продукции, денежные доходы населения и ставка по депозитам (среди населения в нашей стране очень мало спонсоров (акционеров) реального сектора, в связи с чем увеличение денежных доходов населения уменьшает приток денежной массы в реальный сектор).

Анализ переменной «импорт» показал, что влияние могут оказывать следующие факторы: ИПП, тарифы грузоперевозок, курс валют, ИЦП, доходы населения, инвестиции, численность населения, квоты и темпы роста мировой экономики.

Проведенный анализ эконометрических взаимосвязей подтверждает, что текстильно-швейная отрасль ориентирована на конечного потребителя, так как значимыми оказались следующие влияющие на исследуемый показатель положительно показатели: доходы местного населения и темпы роста мировой экономики. Управляющей переменной в этой модели стал курс валют, а именно официальный курс рубля к доллару (отрицательное влияние).

Последняя эндогенная переменная, которая оказывает сильное влияние на вышеупомянутые показатели, – это индекс цен производителей. На него влияет уровень жизни населения (расходы), индекс тарифов на электроэнергию, денежная масса и значение ИЦП в предыдущий момент времени.

Согласно эконометрическому подходу к моделированию все эти факторы являются значимыми, а согласно экономическому смыслу ИЦП все они оказывают положительное влияние.

Значимые взаимосвязи отражены на концептуальной схеме (см. рис.1).

Таким образом был сформирован список переменных модели. Фазовые эндогенные переменные (% к соответствующему периоду предыдущего года):

$x_1(t)$ - индекс промышленного производства текстильной и швейной продукции;

$x_2(t)$ - индекс-дефлятор промышленного производства текстильной и швейной продукции;

$x_3(t)$ - инвестиции в основной капитал текстильного и швейного производства (прирост);

$x_4(t)$ - импорт текстиля, текстильных изделий и обуви (прирост);

$x_5(t)$ - индекс цен производителей текстильной и швейной продукции.

Фазовые экзогенные переменные (% к соответствующему периоду предыдущего года):

$g_6(t)$ - реальные расходы населения;

$g_7(t)$ - денежные доходы населения (прирост);

$g_8(t)$ - объем мирового ВВП (прирост);

$g_9(t)$ - индекс мировых цен на шерсть.

Управляющие переменные (% к соответствующему периоду предыдущего года):

$u_1(t)$ - индекс тарифов на железнодорожные грузовые перевозки;

$u_2(t)$ - индекс тарифов на электроэнергию;

$u_3(t)$ - официальный курс рубля к доллару США (прирост);

$u_4(t)$ - ставка по рублевым депозитам для нефинансовых организаций (прирост);

$u_5(t)$ - ставка рефинансирования (прирост);

$u_6(t)$ - индекс потребительских цен на непродовольственные товары;

$u_7(t)$ - денежная масса (M2) (прирост).

После предварительного анализа данных с помощью АК «Прогноз-5» и решения полученной системы одновременных уравнений относительно «ведущих» компонент:

$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$, при помощи двухшагового МНК в Eviews-5 была получена следующая модель отрасли:

$$x_1(t) = 49.21 + 1.14x_1(t-1) - 0.01x_2(t) + 0.01x_3(t-1) - 0.18x_4(t-1) - 0.52u_6(t-1);$$

$$x_2(t) = -45.87 - 0.17x_4(t) + 0.24x_5(t) + 0.02g_9(t-2) + 0.92u_1(t) + 0.14u_2(t);$$

$$x_3(t) = -50.78 + 1.84x_1(t-2) + 0.05x_3(t-3) - 1.47x_4(t-3) - 2.32g_7(t) - 13.60u_4(t) + 4.01u_5(t) + 2.73u_7(t);$$

$$x_4(t) = 21.24 + 0.14g_7(t) + 5.47g_8(t) - 1.11u_3(t-1);$$

$$x_5(t) = -20.02 + 0.61x_5(t-1) + 0.15g_6(t-1) + 0.40u_2(t) + 0.01u_7(t).$$

На эту модель был наложен ряд ограничений, которые можно разделить на два класса: ограничения на управляющие переменные и ограничения на фазовые переменные.

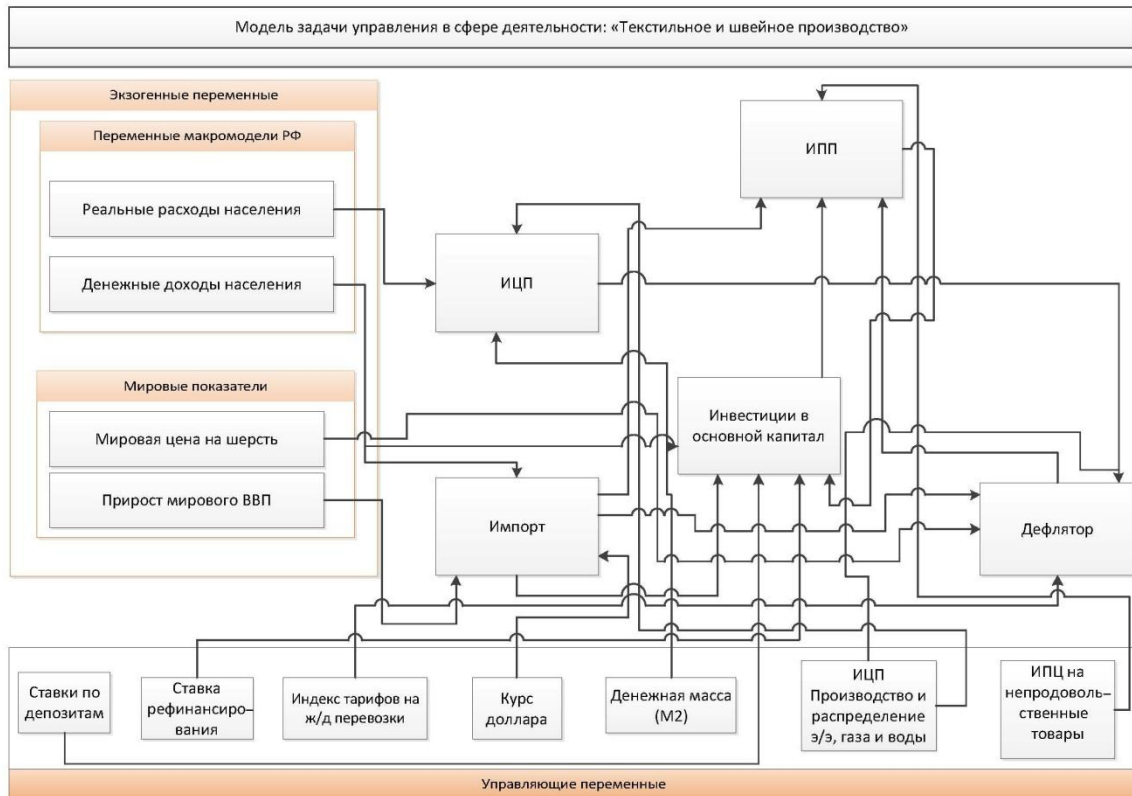


Рис.1. Концептуальная схема взаимосвязей факторов модели текстильно-швейной отрасли

Ограничения на управляющие переменные имеют следующий смысл: для каждого момента времени $t_i \in J$ задан интервал, в котором лежит управление: $u(t_i) \leq u(t_i) \leq u(t_i)$, $i = 1, \dots, \mu$ (интервалы определены в соответствии с прогнозами Министерства экономического развития РФ [7]).

Поскольку вся формализация отрасли проходила в реальных показателях в квартальной динамике, то в рамках модели невозможно точно определить реальное годовое значение. За его оценку было принято среднее арифметическое квартальных значений соответствующих периодов. Например, годовое изменение прироста импорта за 2010 г. к уровню 2009 г. оценивается как

$$\frac{1}{4}(x_4(1) + x_4(2) + x_4(3) + x_4(4)).$$

В соответствии со Стратегией развития легкой промышленности России на период до 2020 г. [13] заданы ограничения на годовое изменение фазовых переменных, т.е., например, прирост импорта за 2010 г. к уровню 2009 г. не превысит 16.09% и 23.45% за 2011 г. к 2010 г., а именно:

$$\begin{aligned} x_4(1) + x_4(2) + x_4(3) + x_4(4) &\leq 64.36, \\ x_4(5) + x_4(6) + x_4(7) + x_4(8) &\leq 93.80. \end{aligned}$$

По ИПП $x_1(t)$ годовые оценки сверху составляют 105,59% за 2010 г. и 108,22% за

2011 г.. Для ИЦП $x_5(t)$ они соответственно равны 106,7% и 106,1%.

4. Постановка задачи оптимального управления

Целью управления является стимулирование развития текстильно-швейной отрасли РФ, поэтому в качестве целевого показателя выбран прирост объема производства за период с 1-го квартала 2010 г. по 4-й квартал 2011 г. к выпуску данной продукции в 2009 г. Аналогично методике учета годовых ограничений на значения фазовых переменных прирост объема производства за период управления моделируется как среднее арифметическое от квартальных показателей:

$$\frac{1}{8}(x_1(1) + x_1(2) + x_1(3) + x_1(4) + x_1(5) + x_1(6) + x_1(7) + x_1(8)).$$

Таким образом, для данной модели ставится задача управления: на периоде с 1 кв. 2010г. по 4 кв. 2011г. найти такие значения управляющих переменных, которые в условиях описанных выше ограничений максимизируют прирост объема производства на периоде управления относительно объема производства в 2009г. При этом константу $\frac{1}{8}$ в целевой функции можно опустить. Таким образом,

целевой функционал будет выглядеть следующим образом:

$$Z = x_1(1) + x_1(2) + x_1(3) + x_1(4) + x_1(5) + x_1(6) + x_1(7) + x_1(8).$$

5. Поиск оптимального решения

С целью приведения задачи (1)–(4) к форме, удобной для применения предлагаемых методов, воспользуемся возможностью последовательных подстановок (см. [5, 11]). Выпишем два первых уравнения системы (1) при $i = 1, i = 2$:

$$x(t_1) = A_{10} x(t_0) + B_{11} u(t_1) + g(t_1), \quad (5)$$

$$x(t_2) = A_{20} x(t_0) + A_{21} x(t_1) + B_{21} u(t_1) + B_{22} u(t_2) + g(t_2). \quad (6)$$

Согласно выражению (2) начальное состояние системы $x(t_0)$ считается заданным, в силу этого из выражения (5) следует, что вектор $x(t_1)$ зависит только от управляющих переменных в момент времени t_1 и известной предыстории. Из уравнения (6) следует, что на вектор $x(t_2)$ оказывают влияние начальное состояние, управление в моменты времени t_1 и t_2 , а также предыдущее фазовое состояние $x(t_1)$. Подставляя правую часть уравнения (5) в уравнение (6), выразим $x(t_2)$ через управляющие переменные и известную предысторию:

$$x(t_2) = (A_{20} + A_{21}A_{10}) x(t_0) + (B_{21} + A_{21}B_{11}) u(t_1) + B_{22} u(t_2) + A_{21}g(t_1) + g(t_2).$$

Аналогично $x(t_3)$ будет зависеть, кроме всего прочего, от фазовых состояний $x(t_1)$ и $x(t_2)$. Выполнив подстановку в $x(t_3)$ выражения для $x(t_1)$ и полученного на первом шаге выражения для $x(t_2)$, получим зависимость $x(t_3)$ от управляющих переменных в момент времени t_1, t_2 и t_3 и известной предыстории.

Действуя таким образом для всех моментов времени $t_i, i = 1, \mu$, получим совокупность выражений фазовых переменных через управляющие:

$$x(t_i) = \Phi_i(u(t_1), \dots, u(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, \mu, \quad (7)$$

где $\Phi_i: R^{\mu} \rightarrow R^n, i = 1, \mu$ – линейные ограниченные вектор-функционалы.

Подставив выражения (7) в ограничения исходной задачи (3) и целевой функционал (4), перейдем к задаче оптимального управления, в которой неизвестными выступают лишь управляющие переменные $u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_\mu)$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\mu} D_j u(t_j) \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^{\mu} H_j u(t_j) \leq \gamma' \in R^N. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, последовательные подстановки позволяют перейти от исходной задачи (1)–(4) размерности $(n+r)T$ переменных к эквивалентной задаче (8) с количеством переменных, равным rT . При этом с помощью соотношений (7) по решению задачи (8) однозначно восстанавливается решение задачи (1)–(4). Кроме того, задача (8) содержит на μn ограничений меньше, чем исходная задача (1)–(4).

Учитывая тот факт, что количество управляющих переменных, как правило, значительно меньше количества фазовых переменных, можно получить существенный выигрыш в размерности задачи. «Платой» за такой выигрыш является время, потраченное на процедуру последовательных подстановок и процедуру восстановления решения исходной задачи по найденному решению задачи (8).

В рамках задачи оптимального управления процессом развития текстильно-швейной отрасли РФ путем последовательных подстановок может быть достигнуто сокращение переменных с 96 до 56. Такое сокращение размерности задачи позволяет решить ее с использованием системы компьютерной алгебры Maple.

При решении задачи была установлена пустота области допустимых значений. Это указывает на несогласованность прогнозов двух министерств: Министерства экономического развития РФ и Министерства промышленности и торговли РФ. Возможной причиной данного несоответствия является то, что долгосрочная стратегия развития легкой промышленности разработана до мирового финансового кризиса, а прогнозы развития социально-экономических показателей РФ – после.

Выход из этой ситуации авторы видят либо во введении дополнительных ресурсов управления, либо в коррекции модели на основе подхода, предложенного в работах [4, 6].

6. Коррекция модели текстильно-швейной отрасли Российской Федерации

Дадим общее описание метода коррекции статических задач, предложенного в работах [4, 6].

Пусть имеется статическая линейная задача в общем виде:

$$\begin{cases} PX \rightarrow \max, \\ WX \leq b, \\ X \geq 0, \end{cases}$$

где P – вектор-строка размерности n , X – n -мерный вектор-столбец, W – $(m \times n)$ -матрица, b – вектор-столбец размерности m .

Для системы ограничений $WX \leq b$ можно ввести понятие вектора невязок ε :

$$\varepsilon = (WX - b)^+ \in E^m,$$

где $(z)^+$ обозначает то, что отрицательные компоненты вектора z зануляются.

Введем понятие меры d – функции, для которой выполняются следующие условия:

1. $d(0) = 0$.
2. $\forall y > 0 \quad d(y) > 0$.
3. $\forall y \geq z \geq 0 \quad d(y) \geq d(z)$.

Тогда можно определить меру невязки для системы ограничений $WX \leq b$:

$$d(\varepsilon) = d((WX - b)^+).$$

Соответственно определяется функция невязки для данной системы:

$$f(X) = d((WX - b)^+).$$

Функция невязки показывает для каждого конкретного значения X^0 меру несогласованности (несовместности) системы ограничений.

Задача коррекции возникает как задача поиска таких значений X , которые доставят системе минимальную с точки зрения функции невязки несогласованность. Другими словами, решается оптимизационная задача: $\min \{f(X) | X \geq 0\}$. В частных случаях такая задача может иметь единственное решение.

Согласно работе [4] в качестве $d(\varepsilon)$ используются следующие выражения: $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2^2, (r, \cdot)$. Тогда функции невязки принимают вид:

1. $f_0(X) = \|(WX - b)^+\|_0$, где $\|z\|_0 = \max_{j=1,m} |z_j|$.
2. $f_1(X) = \|(WX - b)^+\|_1$, где $\|z\|_1 = \sum_{j=1}^m |z_j|$.
3. $f_2(X) = \|(WX - b)^+\|_2^2$, где $\|z\|_2 = \left(\sum_{j=1}^m z_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
4. $f_3(X) = (r, (WX - b)^+)$, где $r = (r_1, \dots, r_m) > 0$.

Соответственно каждая из функций $f_0(X), f_1(X), f_2(X), f_3(X)$ порождает свою задачу коррекции. Рассмотрим каждую из них отдельно.

6.1 Задача коррекции для функции

$$f_0(X) = \|(WX - b)^+\|_0$$

Пусть w_j – j -я строка матрицы W . Тогда j -я компонента вектора $(WX - b)^+$ запишется как $((w_j, X) - b_j)^+$. Знак "+" означает, что данный элемент принимает либо положительное значение, либо нулевое, если выражение в скобках отрицательное.

Задача коррекции для функции невязки $f_0(X) = \|(WX - b)^+\|_0$:

$$\begin{aligned} \min_X \{f_0(X) | X \geq 0\} = \\ = \min_X \left\{ \max_{j=1,m} \left\{ ((w_j, X) - b_j)^+ \right\} | X \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что модуль в данном выражении можно опустить.

Введя замену $Z_j(X) = (w_j, X) - b_j$, $j = 1, \dots, m$ и переписав в этом случае выражение $((w_j, X) - b_j)^+$ как $\max \{Z_j(X); 0\}$, перейдем к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \min_X \left\{ \max_{j=1,m} \left\{ \max \{Z_j(X); 0\} \right\} | X \geq 0 \right\} = \\ = \min_X \left\{ \max \{Z_1(X); \dots; Z_m(X); 0\} | X \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$\max \{Z_1(X); \dots; Z_m(X); 0\} = X_{n+1}$. Тогда задача коррекции (9) сводится к задаче:

$$\min_{X_i, i=1, \dots, n+1} \left\{ X_{n+1} \left| \begin{array}{l} Z_1(X) \leq X_{n+1}, \dots, Z_m(X) \leq X_{n+1}, \\ X_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1 \end{array} \right. \right\}$$

или

$$\min_{X_i, i=1, \dots, n+1} \left\{ X_{n+1} \left| \begin{array}{l} (w_j, X) - b_j \leq X_{n+1}, j = 1, \dots, m, \\ X_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1 \end{array} \right. \right\}. \quad (10)$$

Таким образом, задача коррекции (9) сводится к задаче линейного программирования (10).

6.2 Задача коррекции для функции

$$f_1(X) = \|(WX - b)^+\|_1$$

Используя обозначения п. 6.1, задачу коррекции для функции невязки $f_1(X)$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_X \{f_1(X) | X \geq 0\} = \\ = \min_X \left\{ \sum_{j=1}^m ((w_j, X) - b_j)^+ | X \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть также $Z_j(X) = (w_j, X) - b_j$, $j = 1, \dots, m$, тогда

$$((w_j, X) - b_j)^+ = \max \{Z_j(X); 0\} \geq 0.$$

Следовательно, модуль в выражении (11) может быть опущен.

Задача коррекции (11) примет вид:

$$\min_X \left\{ \sum_{j=1}^m \max \{ Z_j(X); 0 \} \mid X \geq 0 \right\}.$$

Обозначим

$\max \{ Z_j(X); 0 \} = X_{n+j}, j=1, \dots, m$. Тогда

$$\begin{aligned} & \min_X \{ f_1(X) \mid X \geq 0 \} = \\ & = \min_X \left\{ \sum_{j=1}^m X_{n+j} \mid \max \{ Z_j(X); 0 \} = X_{n+j}, j=1, \dots, m, X \geq 0 \right\} = \\ & = \min_{X_i, i=1, \dots, n+m} \left\{ \sum_{j=1}^m X_{n+j} \mid \begin{array}{l} Z_j(X) \leq X_{n+j}, j=1, \dots, m, \\ X_{n+j} \geq 0, j=1, \dots, m, X \geq 0 \end{array} \right\} = \\ & = \min_{X_i, i=1, \dots, n+m} \left\{ \sum_{j=1}^m X_{n+j} \mid \begin{array}{l} (w_j, X) - b_j \leq X_{n+j}, \\ X_{n+j} \geq 0, j=1, \dots, m, X \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Таким образом, задача коррекции (11), как и в случае задачи коррекции (9), сводится к задаче линейного программирования.

6.3 Задача коррекции для функции

$$f_2(X) = \|(WX - b)^+\|_2^2$$

В данном случае задача коррекции запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \min_X \{ f_2(X) \mid X \geq 0 \} = \\ & = \min_X \left\{ \sum_{j=1}^m ((w_j, X) - b_j)^+ \mid X \geq 0 \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Пусть так же, как в предыдущем случае, $Z_j(X) = (w_j, X) - b_j, j=1, \dots, m$, тогда

$$((w_j, X) - b_j)^+ = \max \{ Z_j(X); 0 \}. \text{ Получим}$$

$$\begin{aligned} & \min_X \left\{ \sum_{j=1}^m ((w_j, X) - b_j)^+ \mid X \geq 0 \right\} = \\ & = \min_X \left\{ \sum_{j=1}^m \max \{ Z_j(X); 0 \} \mid X \geq 0 \right\} = \\ & = \min_X \left\{ \sum_{j=1}^m X_{n+j} \mid \begin{array}{l} X_{n+j} = \max \{ Z_j(X); 0 \}, \\ j=1, \dots, m, X \geq 0 \end{array} \right\} = \\ & = \min_{X_i, i=1, n+m} \left\{ \sum_{j=1}^m X_{n+j} \mid \begin{array}{l} X_{n+j} \geq Z_j, \\ X_{n+j} \geq 0, j=1, \dots, m, X \geq 0 \end{array} \right\} = \\ & = \min_{X_i, i=1, n+m} \left\{ \sum_{j=1}^m X_{n+j} \mid \begin{array}{l} X_{n+j} \geq ((w_j, X) - b_j), \\ X_{n+j} \geq 0, j=1, \dots, m, \\ X \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Таким образом, задача коррекции (13) сводится к задаче квадратичного программирования (14). Данная задача может быть решена точно с использованием обобщенного метода Лагранжа и необходимых и достаточных условий экстремума. Либо можно произвести поиск приближенного

решения, например, при помощи фейеровского отображения (подробно см. [2, 3]). Суть последнего заключается в построении итерационного процесса, сходящегося к оптимальному решению задачи (14). Согласно [4, с.78] фейеровский процесс для функции $f_2(X) = \|(WX - b)^+\|_2^2$ будет определяться следующим выражением:

$$X^{k+1} = \left[X^k - \frac{\lambda}{\delta} \sum_{j=1}^m ((w_j, X^k) - b_j)^+ w_j \right]^+,$$

где $\lambda \in (0; 1]$, $\delta = \sum_{j=1}^m \|w_j\|_2^2$.

Последовательность $\{X^k\}$ для любой начальной точки X^0 сходится к точке минимума функции $f_2(X) = \|(WX - b)^+\|_2^2$.

6.4 Задача коррекции для функции

$$f_3(X) = (r, (WX - b)^+)$$

Задача коррекции запишется как

$$\begin{aligned} & \min_X \{ f_3(X) \mid X \geq 0 \} = \\ & = \min_X \left\{ (r, (WX - b)^+) \mid X \geq 0 \right\} = \\ & = \min_X \left\{ \sum_{j=1}^m r_j ((w_j, X) - b_j)^+ \mid X \geq 0 \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Используем

замену

$$Z_j(X) = (w_j, X) - b_j, j=1, \dots, m, \text{ тогда}$$

тогда

$$((w_j, X) - b_j)^+ = \max \{ Z_j(X); 0 \}. \text{ Выражение}$$

(13) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \min_X \left\{ \sum_{j=1}^m r_j \max \{ Z_j(X); 0 \} \mid X \geq 0 \right\} = \\ & = \min_X \left\{ \sum_{j=1}^m r_j X_{n+j} \mid \begin{array}{l} X_{n+j} = \max \{ Z_j(X); 0 \}, \\ j=1, \dots, m, X \geq 0 \end{array} \right\} = \\ & = \min_{X_i, i=1, n+m} \left\{ \sum_{j=1}^m r_j X_{n+j} \mid \begin{array}{l} X_{n+j} \geq ((w_j, X) - b_j), \\ X_{n+j} \geq 0, j=1, \dots, m, \\ X \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Таким образом, задача коррекции (15), как и в случае задачи коррекции (16), сводится к задаче линейного программирования.

7. Приведение динамической задачи к исходному виду для задачи коррекции

Динамика в модели определяется системой уравнений связи фазовых и управляющих переменных (1). Как отмечено в п.5 настоящей работы, в силу специфики системы (1) вектор фазовых переменных в момент времени t_i зависит от значений фазовых переменных в моменты времени до t_{i-1}

включительно и от управляющих переменных в моменты времени до t_i включительно. Таким образом, выполняя последовательные подстановки, описанные в п. 5, удастся перейти к задаче (7) – (8), где (7) – выражения явной зависимости фазовых переменных только от управляющих, а (8) – задача поиска оптимального управления, включающая в качестве неизвестных лишь управляющие переменные и несодержащая уравнений динамики. Задачу (8) будем называть исходной формой задачи коррекции.

8. Результаты коррекции задачи оптимального управления для модели текстильно-швейной отрасли РФ

В ходе исследования было установлено, что система ограничений исходной задачи оптимального управления для текстильно-швейной отрасли РФ является несовместной. Для выхода из этой ситуации была проведена

коррекция модели. Для устранения влияния различного масштаба переменных, сезонности, устранения автокорреляции все переменные моделировались как относительные величины (см. п.3 настоящей работы). Так как размерность переменных одинакова, то для коррекции целесообразнее применять функцию невязки $f_1(X)$.

В результате решения скорректированной задачи были определены значения управляющих переменных, которые максимизируют прирост объема отгруженной продукции текстильно-швейной отрасли РФ за 2010-2011 гг. к уровню 2009 г. для скорректированной модели. Данный прирост составляет 6,91% при динамике управляющих воздействий, отраженной в табл. 1. и на диаграмме (рис. 2).

Значения управляющих воздействий на периоде управления

Таблица 1

Управляющие переменные	1 кв. 2010 г.	2 кв. 2010 г.	3 кв. 2010 г.	4 кв. 2010 г.	1 кв. 2011 г.	2 кв. 2011 г.	3 кв. 2011 г.	4 кв. 2011 г.
$u_1(t)$	104,08	104,08	98,46	101,16	97,20	97,20	118,80	97,20
$u_2(t)$	106,19	100,74	103,00	105,57	113,66	113,66	113,66	113,66
$u_3(t)$	0,00	0,00	0,00	4,26	3,34	2,27	1,97	0,00
$u_4(t)$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	17,85	76,26	50,79
$u_5(t)$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,00
$u_6(t)$	108,41	97,41	107,28	106,44	107,15	106,51	105,91	105,30
$u_7(t)$	19,66	17,79	16,58	26,51	26,71	25,14	25,28	13,08

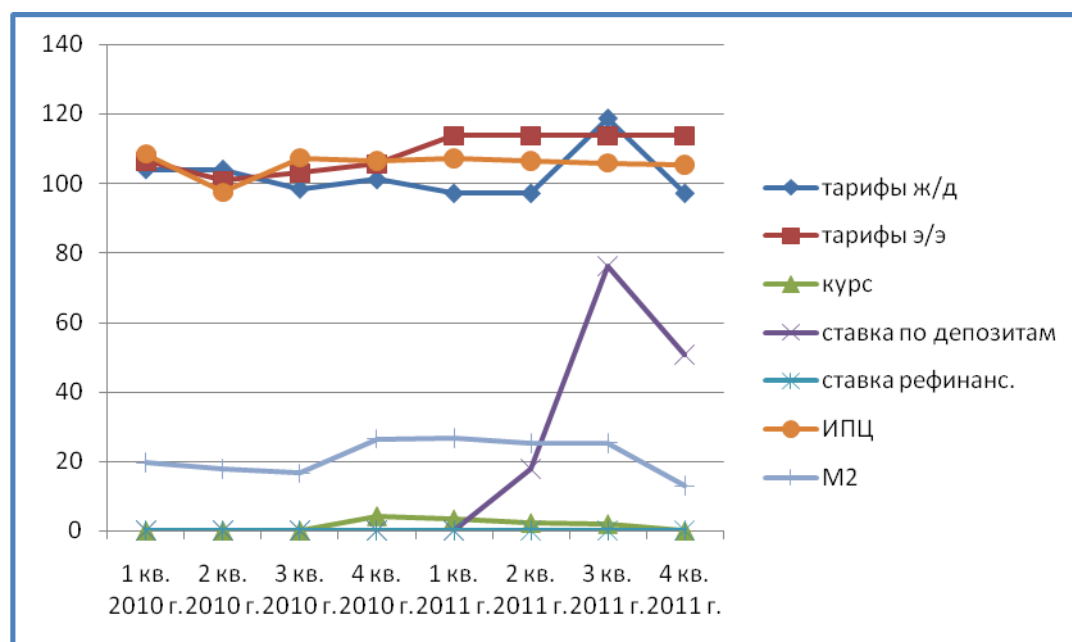


Рис.2. Решение скорректированной задачи

Анализ управляющих переменных показал, что, для того чтобы максимизировать средний прирост объема отгруженной продукции текстильно-швейной отрасли РФ за 2 года (2010-2011), правительству необходимо применить ряд мер:

- сдерживание уровня инфляции на непродовольственные товары на уровне 8%. На текущий момент по данному вопросу нет единой официальной точки зрения. Согласно Е. Письменной [10], правительство ожидает, что инфляция не превысит 6,5-7,5% (в прогнозе Минэкономразвития — 7,5%). Вице-премьер А. Кудрин выражал надежду, что у России есть перспективы выйти на уровень инфляции ниже 7%. ЦБ задает коридор в 6-7%. При этом некоторые эксперты, в частности главный экономист BNP Paribas Юлия Цепляева, утверждают, что инфляция будет на уровне 8,7 %.
- Снижение роста уровня тарифов на электроэнергию в 2010 г. до 3% в год. После этого в 2011 г. можно отпустить данный показатель до 13% годовых, причем именно такой ежегодный прирост тарифов наблюдается в среднем за последние 5 лет.
- Удержание ставки рефинансирования и официального курса доллара примерно на прежнем уровне (отклонение 1-1,5%).
- Поддержка прироста денежной массы в среднем на 22% в год. Согласно имеющимся данным на 2010 г. средний прирост денежной массы составил примерно 28%, при условии, что в 2009 г. агрегат M2 составил 97% к объему одноименного показателя в 2008г. Таким образом, поддержание прироста этой управляющей переменной на данном уровне выглядит правдоподобно.
- Сокращение прироста уровня тарифов на грузовые перевозки в среднем до 2% в год.
- Стимулирование роста ставки по депозитам нефинансовым организациям в 2010-2011 гг., поскольку во время кризиса ставка сократилась практически в 3 раза.

При коррекции были ослаблены 17 ограничений, при этом максимальная невязка составила 58,56 единиц. При расширении допустимых интервалов ограничений была получена разрешимая задача, решение которой обеспечивает рост целевого показателя не менее 6,91%.

Список литературы

1. Андрианов Д.Л., Селянин А.О., Шевыров П.В. и др. Целевое управление процессами социально-экономического развития субъектов Российской Федерации: моделирование, информационное, математическое и инструментальное

обеспечение / Перм. гос. ун-т., Пермь, 2008. 240с.

2. Еремин И.И., Попов Л.Д. Замкнутые фейерверские циклы для несовместных систем выпуклых неравенств // Известия высших учебных заведений. Математика, Казань, 2008. №1. С. 11-19.

3. Еремин И.И. Методы фейерверских приближений в выпуклом программировании // Математические заметки. М.:Наука, 1968. Т.3, №2. С. 217-234.

4. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.

5. Еремченко С.М. Задача оптимального управления для одного класса авторегрессионных моделей // Экономическая кибернетика: математические и инструментальные методы анализа, прогнозирования и управления / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2004. С. 39-45.

6. Максимов В.П., Поносов Д.А., Чадов А.Л. Некоторые задачи экономико-математического моделирования // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2010. Вып. 2(5). С. 45-50.

7. Официальный сайт Министерства экономического развития РФ. URL: <<http://www.economy.gov.ru>> (дата обращения 04.10.11).

8. Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики. URL: <<http://www.gks.ru>> (дата обращения 04.10.11).

9. Официальный сайт Федеральной таможенной службы. URL: <<http://www.customs.ru/>> (дата обращения 04.10.11).

10. Письменная Е. Правда об инфляции // Ведомости, 2011. №72 (2838). URL: <www1.vedomosti.ru/90/newspaper/article.shtml?2011/04/22/259057> (дата обращения 04.10.11).

11. Поносов Д.А., Чадов А.Л. Применение алгоритмов глобальной оптимизации к задаче целевого управления для динамических моделей экономики с дискретным временем // Моделирование экономических процессов в условиях инновационного пути развития России: сб. науч. работ кафедры ММАЭ МГУ. М., 2009. С.103-113.

12. Проблемы безопасности России: Доклад Председателя ЦС РУСО академика РАСХН В.С. Шевелухи на Втором Пленуме РУСО. URL: <www.cprf.info/news/interviews/38458.html> (дата обращения 04.10.11).

13. Стратегия развития легкой промышленности России на период до 2020 года (утв. Приказом Минпромторга России от 24 сентября 2009 г. № 853). URL: <www.roslegprom.ru/Go/ViewArticle/id=1692> (дата обращения 04.10.11).