РАЗДЕЛ II. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.929 + 330.4

*КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫПОЛНЕНИЕМ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ. КОНСТРУКТИВНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ**

В.П. Максимов, д. физ.-мат. наук, проф. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Электронный адрес: maksimov@econ.psu.ru
А.Л. Чадов, ст. преп. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Электронный адрес: alchadov@yandex.ru
Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Рассматриваются линейные краевые задачи для систем функционально-дифференциальных уравнений с числом краевых условий, превышающим размерность системы. В экономической динамике краевые задачи связаны с исследованием достижимости заданных показателей функционирования экономической системы. Исследуется разрешимость таких задач в случае, когда допускается приближенное выполнение краевых условий. Предлагаемый подход использует теоремы, условия которых могут быть проверены с использованием современных средств вычислений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; краевые задачи; конструктивные методы; доказательные вычисления.

Введение

Краевые задачи экономической динамики тесно связаны с реальными задачами экономики, в которых требуется дать ответ на вопрос о возможности достижения заданных значений некоторых целевых показателей развития экономической системы. При этом нередко число целевых условий, сформулированных на основе плановых или желаемых показателей, оказывается больше, чем это допускается математической теорией, требующей строгого согласования числа условий с размерностью соответствующей динамической модели. Обычно такая модель имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений, или, в более общем случае, системы функционально-дифференциальных уравнений, позволяющей учитывать при моделировании реальных процессов эффекты запаздывания и наличие внешних импульсных (шоковых) воздействий на систему [9, 10, 12 13, 15]. Краевая задача, т.е. система уравнений динамики и краевых условий, с числом краевых условий, превышающим размерность пространства состояний системы без ограничений, называется переопределенной и требует для ее исследования специальных подходов. Один из таких подходов основан на расширении пространства состояний, позволяющем согласовать число краевых условий с размерностью расширенного пространства. Этот подход применительно к задачам экономической динамики подробно описан в работе [12]. Другой подход (см. [13]) использует идею ослабления ограничений, при котором происходит последовательное расширение множества допустимых состояний. В настоящей работе проблема переопределенности решается путем перехода к постановке краевой задачи, при которой допускается приближенное выполенение всех или некоторых краевых условий, заданных в виде равенств. При этом допустимый уровень погрешности может задаваться индивидуально для каждого краевого условия. Содержательный смысл приближенного выполнения краевых (целевых) условий представляется весьма естественным

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-01, и компании «Прогноз», г. Пермь.

для реальных задач экономической динамики. Основной математический результат работы в этой части (теорема 1) опубликован без доказательства в кратком сообщении [14].

Исследованию краевых задач для систем дифференциальных уравнений и их обобщений посвящена обширная литература (см., например, [1, 2, 3, 19] и приводимую там библиографию). В этой работе речь идет о направлении исследований, связанном с теоретическим обоснованием и практической реализацией компьютерного (computer-assisted) исследования линейных краевых задач. Целью такого исследования является установление факта разрешимости краевой задачи и построение гарантированных оценок погрешности приближенных решений. Основу излагаемого здесь подхода составляют приемы приближенного описания множества решений линейного функционально-дифференциального уравнения с гарантированной оценкой погрешности в сочетании со специальными теоремами, условия которых могут быть проверены в результате доказательного вычислительного эксперимента, использующего современные компьютерные технологии и системы (Maple, Mathematica и др.). В случаях, когда известные достаточные признаки разрешимости краевой задачи оказываются неприменимыми, обсуждаемый подход может оказаться единственно возможным для получения результата [20]. Различные варианты этого подхода применительно к обыкновенным дифференциальным, интегральным уравнениям и уравнениям с частными производными занимают заметное место в современной литературе, начиная с основополагающей монографии Каучера и Миранкера [21]. Из числа недавних отметим работы [22–24].

1. Предварительные сведения

Мы ограничиваемся здесь краевыми задачами

$$\mathrm{L}x = f, \quad lx = \beta \qquad (1)$$

с линейным ограниченным оператором $\mathrm{L}: AC^n[0;T] \to L^n[0;T]$ и линейным ограниченным вектор-функционалом $l: AC^n[0;T] \to R^m$. Здесь $AC^n[0;T]$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0;T] \to R^n$, $L^n[0,T]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $z:[0,T] \to R^n$,

$$\|x\|_{AC^n} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L^n}, \quad \|z\|_{L^n} = \int_0^T |z(t)|dt,$$

где $|\alpha| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |\alpha_i|$ для $\alpha = col(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R^n$. Систематическое изложение теории краевых задач (1) дается в монографиях [1, 2, 8]. Ниже всюду предполагается, что главная часть оператора L, – оператор $Q = \mathrm{L}V$, где $(Vz)(t) = \int\limits_0^t z(s)ds$, имеет представление

$$\big(Qz\big)(t) = z(t) - \int_0^t K(t,s)z(s)ds, \quad t \in [0,T]. \qquad (2)$$

Здесь элементы $k_{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}$ и таковы, что на этом множестве

$$\left|k_{ij}(t,s)\right| \le \kappa(t), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

где функция κ суммируема на $[0,T]$. В этом случае функционально-дифференциальная система $\mathrm{L}x = f$ охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. Пространство всех решений однородной системы $\mathrm{L}x = 0$ имеет размерность n. Пусть $\{x_1,\dots,x_n\}$ – базис в этом пространстве. Матрица $X = (x_1,\dots,x_n)$ называется фундаментальной матрицей (для определенности будем считать, что $X(0) = E$,– единичная $n \times n$-матрица). Задача Коши

$$\mathrm{L}x = f, \quad x(0) = \alpha$$

однозначно разрешима при любых $f \in L^n[0,T]$ и $\alpha \in R^n$ и ее решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)\alpha + \int_0^t C(t,s) f(s)ds, \qquad (3)$$

где $C(t,s)$ – матрица Коши.

Вектор-функционал l в задаче (1) имеет представление

$$lx = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds, \qquad (4)$$

где элементы $m \times n$-матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном на $[0,T]$, Ψ – постоянная $m \times n$-матрица. Мы будем считать, что компоненты l_i, $i = 1,\dots,m$, вектор-функционала $l = col(l_1,\dots,l_m)$ образуют линейно независимую систему. Вектор-функционалы вида (4) исчерпывают класс линейных ограниченных вектор-функционалов, определенных на $AC^n[0,T]$. Краевые условия $lx = \beta$ охватывают многочисленные классы конкретных краевых условий, встречающихся в приложениях, в том числе двух- и многоточечные, интегральные, нагруженные интегральные и др.

В случае $m = n$ необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи (1) — обратимость матрицы $lX = (lx_1,\dots,lx_n)$. Теория и реализуемая схема доказательного вычислительного эксперимента, ориентированного на исследование задачи (1), изложена в [1, 2, 8, 16], там же приведены конкретные примеры эффективного исследования конкретных краевых задач. В основе реализованного подхода лежит известная теорема об обратном операторе [17, с.141], из которой следует, что если удастся найти такую обратимую $n \times n$-матрицу Γ, для которой

$$\|lX - \Gamma\| < \frac{1}{\|\Gamma^{-1}\|}, \qquad (5)$$

то матрица lX тоже обратима и, следовательно, задача (1) однозначно разрешима. При этом однозначно разрешимыми оказываются все краевые задачи с l и X, попадающими в указанную выше окрестность матрицы Γ. Этот факт играет принципиальное значение для установления факта однозначной разрешимости краевых задач с неточно заданными параметрами.

Оказалось, что матрицу Γ целесообразно искать в виде $\Gamma = \bar{l}X^a$, где $\bar{l} : AC^n[0,T] \to R^n$ – вектор-функционал, близкий к l, а матрица X^a со столбцами из $AC^n[0,T]$ и свойством $X^a(0) = E$ дает для оператора $\bar{\mathrm{L}} : AC^n[0,T] \to L^n[0,T]$, близкого к L, достаточно малую «невязку» $\Delta \overset{\text{def}}{=} \bar{\mathrm{L}} X^a$ и, таким образом, служит приближением для фундаментальной матрицы X. Степень близости $\bar{l}$ и l, $\bar{\mathrm{L}}$ и L и степень малости Δ, гарантирующие однозначную разрешимость задачи (1), определяется специальными теоремами [1, с. 211-256], [2, с. 226-249]. При этом фактическое построение матрицы $\bar{l}X^a$ и достоверная проверка неравенства (5) стали возможными с развитием современных компьютерных технологий. Эти технологии предъявляют определенные требования к операторам $\bar{\mathrm{L}}$ и $\bar{l}$ — они должны принадлежать специальным классам «вычислимых» операторов [1, с. 217].

2. Переопределенные краевые задачи и их ε-приближенная разрешимость

В случае $m > n$ задача (1) не может быть корректно разрешимой (т.е. всюду и однозначно разрешимой), необходимое и достаточное условие разрешимости такой задачи может быть записано как условие ортогональности правой части $\{f, \alpha\}$ пространству решений однородной сопряженной задачи ([1, с. 24]; [19, с. 11]). Таким образом, свойство существования точного решения переопределенной задачи является «тонким» (не грубым) свойством, которое не может быть установлено в результате вычислительного эксперимента, оперирующего с приближенными данными и/или использующего вычисления с конечной точностью. Кроме того, в прикладных задачах, где краевая задача (1) возникает как модель реальных изучаемых процессов, упомянутое тонкое свойство либо указывает на неадекватность модели, либо приводит к необходимости изменить постановку задачи. Подход к преодолению проблемы переопределенности, связанный с расширением основного пространства и обобщением понятия решения, был предложен в [5], его систематическое изложение можно найти в [1, 2, 8]. Конструктивная реализация этого подхода подробно описана в [12]. Здесь мы используем другой подход.

С учетом того, что в любом случае на практике доступно для построения лишь приближенное решение (т.е. функция, дающая достаточно малую невязку при подстановке в уравнение и краевые условия), естественной представляется следующая постановка переопределенной краевой задачи (1).

Зафиксируем $\varepsilon = col\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$, $\varepsilon_i \ldots 0$, $i = 1, \ldots, m$. Будем называть ε-приближенным решением краевой задачи (1) такое решение x уравнения $\mathrm{L}x = f$, что

$$|l_i x - \beta_i| ,, \; \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

т.е. краевые условия $lx = \beta$ выполняются приближенно с точностью, определяемой заданным вектором ε.

Наша цель — сформулировать условия ε-приближенной разрешимости в форме, позволяющей производить их проверку с помощью вычислительного эксперимента в ситуации, когда параметры краевых условий (матрицы Ψ и Φ) могут быть заданы неточно, с известными оценками погрешностей. Для формулировки таких условий введем следующие обозначения.

Каждой матрице B, элементы которой могут принимать значения из заданных отрезков, поставим в соответствие пару матриц $\underline{B}$ и $\bar{B}$, элементами которых являются соответственно левые и правые концы упомянутых отрезков. Через B обозначим множество матриц, элементами которых являются всевозможные сочетания левых и правых концов соответствующих отрезков. Значки $\underline{\cdot}$, $\bar{\cdot}$ и $\tilde{\cdot}$ при необходимости будем использовать применительно к элементам матрицы B. Так, например, $b_{ij} \in [\underline{b}_{ij}, \bar{b}_{ij}]$, $\tilde{b}_{ij} = \{\underline{b}_{ij}, \bar{b}_{ij}\}$. Через $\breve{\kappa}(t)$ обозначим $n \times n$-

матрицу $\{\kappa(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$, $\mathrm{R}(t) = \breve{\kappa}(t)\exp\left\{\int_0^t \breve{\kappa}(\tau)d\tau\right\}$. Пусть, далее, $X^a(t)-$ приближенная фундаментальная матрица, $X^a(0)=E$; $\Delta(t)-$ ее невязка: $\left(\mathrm{L}X^a\right)(t)=\Delta(t),\ t\in[0,T]$;

$\Lambda(t) = \lfloor \Delta(t) \rfloor + \mathrm{R}(t)\int\limits_0^t \lfloor \Delta(\tau) \rfloor d\tau$. Здесь и ниже для матрицы $B=\{b_{ij}\}$ через $\lfloor B \rfloor$ обозначена матрица $\{|b_{ij}|\}$. Обозначим $\underline{Y}(t) = \dot{X}^a(t) - \Lambda(t)$,

$$\overline{Y}(t) = \dot{X}^a(t) + \Lambda(t),\ Y(t) = \{y_{ij}(t)\},$$

$$\underline{y}_{ij}(t) \leq y_{ij}(t) \leq \overline{y}_{ij}(t),\ t\in[0,T];$$

$$\Theta = \int\limits_0^T \Phi(s)Y(s)ds,\quad g(t) = \int\limits_0^t C(t,s)f(s)ds,$$

$$b = \beta - lg.$$

Определим матрицу A равенством

$$A = \Psi + \Theta.$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{rang}A = r$ *для всех* $A=\{a_{ij}\}$, $\underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$. *Пусть, далее, найдутся последовательности индексов* $\{i_1,\dots,i_r\}$ *и* $\{j_1,\dots,j_r\}$ *и такая последовательность нулей и единиц* $\{\nu_1\dots,\nu_r\}$; $\nu_k\in\{0,1\},\ k=1,\dots,r$, *что*

$$\left|\max\begin{vmatrix} \tilde{a}_{i_1j_1} & \cdots & \tilde{a}_{i_1j_r} & \tilde{b}_{i_1} + (-1)^{\nu_1}\varepsilon_{i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{a}_{i_rj_1} & \cdots & \tilde{a}_{i_rj_r} & \tilde{b}_{i_r} + (-1)^{\nu_r}\varepsilon_{i_r} \\ \tilde{a}_{ij_1} & \cdots & \tilde{a}_{ij_r} & \tilde{b}_i \end{vmatrix}\right| \leq \tag{6}$$

$$\leq \varepsilon_i \left|\min\begin{vmatrix} \tilde{a}_{i_1j_1} & \cdots & \tilde{a}_{i_1j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{a}_{i_rj_1} & \cdots & \tilde{a}_{i_rj_r} \end{vmatrix}\right|,\ i=1,\dots,m.$$

Тогда краевая задача (1) ε-приближенно разрешима.

Доказательство. Представление решения (3) сводит задачу об ε-приближенной разрешимости к задаче о разрешимости системы линейных алгебраических неравенств. Действительно, применяя вектор-функционал l к обеим частям представления (3), получаем

$$lx = lX\alpha + lg,$$

и, таким образом, ε-приближенная разрешимость краевой задачи — это разрешимость системы неравенств

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j - b_i\right| \leq \varepsilon_i,\quad i=1,\dots,m, \tag{7}$$

где $A=\{a_{ij}\}=lX$, $b_i = \beta_i - (lg)_i$.

Критерий разрешимости (7) дает теорема С.Н. Черникова [18, с. 66-70]: необходимым и достаточным условием совместности системы (7) ранга $r>0$ ($r-$ ранг матрицы, составленной из коэффициентов при ее неизвестных) является существование в ее матрице такого отличного от нуля минора r-го порядка

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix}$$

и такого решения $\left(u'_{i_1},\dots,u'_{i_r}\right)$ системы

$$\left|u_{i_k} - b_{i_k}\right| = \varepsilon_{i_k},\quad k=1,\dots,r,$$

что для всех $i=1,\dots,m$ удовлетворяется соотношение

$$\left|\frac{1}{\Delta_r}\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} & u'_{i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r} & u'_{i_r} \\ a_{ij_1} & \cdots & a_{ij_r} & b_i \end{vmatrix}\right| \leq \varepsilon_i.$$

Непосредственная проверка условий этой теоремы не представляется возможной. В нашем случае мы имеем приближенную информацию о параметрах задачи. При этом дело не только в неточном задании компонент вектор-функционала, но и в отсутствии точной фундаментальной матрицы $X(t)$. Приводимые ниже соображения позволяют утверждать, что при выполнении условий (6) гарантируется выполнение условий теоремы С.Н.Черникова для любых возможных значений компонент a_{ij} и b_i.

Построим сначала двухстороннюю оценку приближения производной $\dot{X}^a(t)$ фундаментальной матрицы по ее невязке $\Delta(t)$. Из $\left(\mathrm{L}X^a\right)(t) = \Delta(t)$ следует, что $X(t) - X^a(t) = \int\limits_0^t C(t,s)\Delta(s)ds$. Учитывая свойства матрицы Коши $C(t,s)$ [7, 11], имеем

$$\dot{X}(t) - \dot{X}^a(t) = \Delta(t) + \int_0^t C_t'(t,s)\Delta(s)ds.$$

Таким образом,

$$\left|\dot{X}(t) - \dot{X}^a(t)\right| \le |\Delta(t)| + \int_0^t |C_t'(t,s)||\Delta(s)|ds.$$

Как показано в [7, 11, 1, с. 242], матрица Коши $C(t,s)$ связана с резольвентным ядром $R(t,s)$ ядра $K(t,s)$ соотношениями

$$R(t,s) = C_t'(t,s), \quad 0 \le s \le t \le T. \qquad (8)$$

$$C(t,s) = E + \int_s^t R(\tau,s)d\tau, \quad 0 \le s \le t \le T. \qquad (9)$$

Спектральный радиус интегрального оператора Вольтерра с ядром $K(t,s)$ равен нулю [6, с. 153], поэтому

$$R(t,s) = K_1(t,s) + K_2(t,s) + \dots + K_q(t,s) + \dots,$$

где $K_1(t,s) = K(t,s)$,

$$K_q(t,s) = \int_s^t K(t,\xi)K_{q-1}(\xi,s)d\xi, \quad q = 2,3,\dots.$$

Покажем, что из неравенства

$$\left|K_q(t,s)\right| \le \breve{\kappa}(t)\frac{\left[\int_s^t \breve{\kappa}(\tau)d\tau\right]^{q-1}}{(q-1)!}$$

следует неравенство

$$\left|K_{q+1}(t,s)\right| \le \breve{\kappa}(t)\frac{\left[\int_s^t \breve{\kappa}(\tau)d\tau\right]^{q}}{q!}.$$

Действительно,

$$\left|K_{q+1}(t,s)\right| \le \breve{\kappa}(t)\int_s^t \breve{\kappa}(\xi)\frac{\left[\int_s^\xi \breve{\kappa}(\tau)d\tau\right]^{q-1}}{(q-1)!}d\xi =$$

$$= \breve{\kappa}(t)\int_s^t d_\xi\left\{\int_s^\xi \breve{\kappa}(\tau)d\tau\right\}\frac{\left[\int_s^\xi \breve{\kappa}(\tau)d\tau\right]^{q-1}}{(q-1)!} =$$

$$= \breve{\kappa}(t)\frac{\left[\int_s^t \breve{\kappa}(\tau)d\tau\right]^{q}}{q!}.$$

Отсюда

$$|R(t,s)| \le \breve{\kappa}(t)\exp\left\{\int_s^t \breve{\kappa}(\tau)d\tau\right\},$$

и для $\dot{X}(t)$, учитывая введенные обозначения, получаем

$$\underline{Y}(t) = \dot{X}^a(t) - \Lambda(t) \le \dot{X}(t) \le \dot{X}^a(t) + \Lambda(t) = \overline{Y}(t).$$

Теперь, по построению, $\underline{a}_{ij} \le a_{ij} \le \overline{a}_{ij}$, $\underline{b}_i \le b_i \le \overline{b}_i$ $i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$ и все $\tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$ допускают эффективное вычисление.

Для завершения доказательства остается заметить, что из определения интервальных операций [4, с. 16] следует, что условия теоремы С.Н.Черникова выполнены для всех возможных значений параметров системы неравенств.

Приведем иллюстрирующий пример. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + t\int_0^t (s-2)^2\dot{x}(s)ds = \dfrac{t^3}{200}y(t) - \dfrac{1}{10}z(t); \\ \dot{y}(t) = -\dfrac{1}{5}x(t) - \int_0^t sy(s)ds + \dfrac{1}{100}z(t); \\ \dot{z}(t) + \dfrac{1}{10}\int_0^t z(s)ds = -\dfrac{1}{10}x(t) + \dfrac{1}{100}y(t) - \dfrac{t}{20}z(t); \\ t \in [0,2]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^2 x(s)ds + y(1) + z(2) = 1; \\ x(1) + \int_0^1 y(s)ds + z(0) = 2; \\ x(0) + y(2) + \int_0^2 sz(s)ds = 3; \\ \int_0^2 x(s)ds + \int_0^2 y(s)ds + \\ + \int_0^2 z(s)ds = 0 \end{cases}$$

Первые три уравнения определяют динамику развития трех отраслей с состояниями $x(t), y(t), z(t)$ соответственно. Отрасли оказывают взаимное влияние друг на друга, сила этого влияния определяется соответствующими коэффициентами, и обладают полной памятью об изменении своих состояний. Интегральные и точечные характеристики функционирования системы определены левыми частями четырех краевых условий. Требуется дать ответ на вопрос, достижимы ли значения этих показателей, заданные в правых частях, при заданном допустимом уровне погрешности.

В этом примере ε-приближенная разрешимость установлена с помощью вычислительного эксперимента, реализованного в системе Maple, для

$$\varepsilon = col\left(\frac{9}{250}, \frac{9}{250}, \frac{9}{250}, \frac{9}{250}\right).$$

Матрица $\breve{\kappa}(t) = \{\kappa(t)\},\ i, j = 1,\dots,3$, используемая в процессе вычислительного эксперимента, имеет элементы

$$\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, & t \in [0, \dfrac{1}{10}]; \\ 2t, & t \in [\dfrac{1}{10}, 2]. \end{cases}$$

Для представления о порядке коэффициентов a_{ij} приведем их приближенные значения:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{41} & \cdots & a_{43} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.659910494 & 0.8539527760 & 0.2829884432 \\ 0.6987867571 & 1.427084461 & 0.8931947935 \\ 0.5638229580 & 0.005162564559 & 1.840289503 \\ 1.526003338 & 1.447018074 & 1.380024455 \end{bmatrix}.$$

Список литературы

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.
2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Симонов П.М.* Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. № 1. С. 3–23.
4. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356 с.
5. *Анохин А.В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1037–1040.
6. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г. и др.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
7. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. №4. С. 601–606.
8. *Максимов В.П.* Арифметика рациональных чисел и компьютерное исследование интегральных уравнений // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 3. С. 121-126.
9. *Максимов В.П.* Об одном подходе к задаче наведения системы в окрестность нормативной траектории // Вестн. Перм. ун-та. Серия: Экономика. 2008. № 8. С. 108–112.
10. *Максимов В.П.* Импульсная коррекция управления для динамических моделей с последействием // Вестн. Перм. ун-та. Серия: Экономика. 2009. № 1. С. 91– 95.
11. *Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* О представлении решений линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9. № 6. С. 1026-1036.
12. *Максимов В.П., Румянцев А.Н.* Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 56–71.
13. *Максимов В.П., Поносов Д.А., Чадов А.Л.* Некоторые задачи экономико-математического моделирования // Вестн. Перм. ун-та. Серия: Экономика. 2010. № 2. С. 45-50.
14. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* О конструктивном исследовании краевых задач с приближенным выполнением краевых условий // Известия высших учебных заведений. Математика. 2010. № 10. С. 82–86.
15. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестн. Перм. ун-та. Серия: Экономика. 2011. № 2. С. 13–23.
16. *Румянцев А.Н.* Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании краевых задач. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1999. 172 с.
17. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
18. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.
19. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. N.Y.: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.
20. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M.* Theory of functional differential equations and applications // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2011. V. 69. № 2. P. 203–235.
21. *Kaucher E.W., Miranker W.L.* Self-validating numerics for functional space problems. N. Y.: Academic Press, 1988. 256 p.
22. *Kolev L.V.* Outer interval solution of the eigenvalue problem under general form parametric dependences // Reliable Computing. 2006. V. 12. P.121–140.
23. *Lin Y., Stadther M.A.* Validated solutions of initial value problems for parametric ODE's // Applied Numerical Mathematics. 2007. V. 57. P. 1145–1162.
24. *Nakao M.T., Hashimoto K., Watanabe Y.* A numerical method to verify the invertibility of linear elliptic operators with applications to nonlinear problems // Computing. 2005. V. 75. P. 1–14.