

УДК 517.929+330.4  
ББК 22.162

**ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ: ТЕОРИЯ, ПРИЛОЖЕНИЯ,  
ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ\***

**Д.Л. Андрианов, докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой информационных систем и математических методов в экономике**

Электронный адрес: [adl@prognoz.ru](mailto:adl@prognoz.ru)

**В.О. Арбузов, аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике**

Электронный адрес: [arbuzov@prognoz.ru](mailto:arbuzov@prognoz.ru)

**С.В. Ивлиев, канд. экон. наук, доцент кафедры информационных систем и математических методов в экономике**

Электронный адрес: [ivliev@prognoz.ru](mailto:ivliev@prognoz.ru)

**В.П. Максимов, докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике**

Электронный адрес: [maksimov@econ.psu.ru](mailto:maksimov@econ.psu.ru)

**П. М. Симонов, докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике**

Электронный адрес: [simpm@mail.ru](mailto:simpm@mail.ru)

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Дается обзор теоретических и прикладных результатов, полученных в рамках научной школы кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике». Обзор охватывает период 2008–2015 гг. В основе теоретических результатов лежат основные положения современной теории функционально-дифференциальных уравнений, разработанной участниками известного Пермского семинара по функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора Н.В. Азбелева (1922–2006). В центре внимания находятся задачи прогнозирования, краевые задачи (задачи достижимости), задачи управления и задачи устойчивости для динамических моделей, учитывающих эффекты последствия и возможность импульсных воздействий (шоков). Для упомянутых задач получены признаки их разрешимости, предлагаются методы построения программных управлений и соответствующих им траекторий, разработаны схемы и алгоритмы исследования на основе доказательного вычислительного эксперимента, включающие алгоритмы коррекции исследуемых задач в случае обнаружения их противоречивости. Результаты прикладных разработок используют достижения теории и представляют собой комплекс программных средств для исследования на разрешимость и решения реальных задач прогнозирования, достижимости, управления и устойчивости для моделей социально-экономического развития субъектов Российской Федерации и российской экономики в целом.

*Ключевые слова: модели экономической динамики, задачи прогнозирования, краевые задачи, задачи управления, информационно-аналитические системы, системы поддержки принятия решений, прогнозно-аналитические системы, бизнес-аналитика, финансовое моделирование, финансовые рынки.*

**Введение**

Приводимый здесь обзор теоретических и прикладных результатов, полученных в рамках научной школы кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике»,

охватывает период 2008–2015 гг. Более ранние работы нашли отражение в обзорах [8; 9], подготовленных к 50-летию экономического факультета Пермского университета, и монографиях [7; 39]. В основе теоретических результатов лежат основные

\* Статья подготовлена в рамках реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, договор №02.G25.31.0039 (постановление Правительства РФ № 218 от 09.04.2010 «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства») при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

положения современной теории, разработанной участниками известного пермского семинара по функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора Н.В. Азбелева (1922 – 2006). В центре внимания находятся задачи прогнозирования, краевые задачи (задачи достижимости), задачи управления и задачи устойчивости для динамических моделей, учитывающих эффекты последствия и возможность импульсных воздействий (шоков). Для упомянутых задач получены признаки их разрешимости, предлагаются методы построения программных управлений и соответствующих им траекторий, разработаны схемы и алгоритмы исследования на основе доказательного вычислительного эксперимента, включающие алгоритмы коррекции исследуемых задач в случае обнаружения их противоречивости.

В прикладных разработках используются достижения теории, их результаты представляют собой комплекс программных средств для исследования на разрешимость и решения реальных задач прогнозирования, достижимости, управления и устойчивости для моделей социально-экономического развития субъектов Российской Федерации и российской экономики в целом.

Исследования выполнялись при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект №10-01-96954 «Математическое и компьютерное моделирование эколого-экономического состояния региона: задачи идентификации, прогнозирования, достижимости и управления»), Министерства образования и науки Российской Федерации (Контракт № 02.G25.31.0039 «Создание высокотехнологичной информационно-аналитической платформы для решения задач стратегического планирования и прогнозирования в государственном управлении, социальной сфере, науке и промышленности» в рамках исполнения, Постановление Правительства РФ № 218 от 09.04.2010) и компании «Прогноз», г. Пермь.

### 1. Задачи управления

Динамические модели, рассматриваемые в этом разделе, охватывают широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом импульсных воздействий (как элементов управления), импульсных возмущений (как помех) и эффектов последствия (запаздывания). Импульсные воздействия на исследуемую систему проявляются в скачкообразном изменении состояния системы и приводят к необходимости рассматривать разрывные решения уравнения с обыкновенной производной.

Эти уравнения рассматриваются в пространстве  $DS(m)$  – конечномерном расширении традиционного пространства абсолютно непрерывных функций (см. ниже). Такой подход к уравнениям со скачками был предложен в [11]. Он не использует сложную теорию обобщенных функций и находит много приложений. Условия разрешимости задачи управления для линейных функционально-дифференциальных систем с траекториями

из пространства  $DS(m)$ , а также конструктивные методы исследования и алгоритмы построения программных управлений изложены в [23; 26; 27; 47]. При этом возможные скачки траекторий рассматривались как компоненты управляющих воздействий в сочетании с традиционным управлением из пространства  $L_2$ , а целью управления являлось достижение предписанных значений каждым из заданных линейных целевых функционалов, число которых, вообще говоря, не связано с размерностью системы управления. Последнее обстоятельство и общий вид целевых функционалов используются в [22] для успокоения траектории системы с последствием в окрестности заданной целевой траектории в течение заданного промежутка времени. Возможные эффекты сочетания импульсных управлений и управлений из  $L_2$  обсуждаются в [23], где, в частности, показано, что использование импульсной составляющей может приводить к уменьшению общих затрат на реализацию управляющих воздействий.

При изложении результатов мы будем следовать обозначениям и основным положениям теории функционально-дифференциальных уравнений в части линейных систем с импульсными воздействиями [5, с.123–130] (см. также [6, с.124–134]; [42, с. 100–108]). Обозначим через  $L = L[0, T]$  пространство суммируемых по Лебегу на конечном промежутке  $[0, T]$  функций  $z: [0, T] \rightarrow R^n$  с нормой

$$\|z\|_n = \int_0^T |z(s)|_n ds, \text{ где } |\cdot|_n - \text{норма в } R^n \text{ (далее,}$$

если размерность пространства очевидна, индекс у нормы будем опускать). Для описания траекторий, имеющих скачки первого рода в последовательные моменты времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_m < T$  ( $t_i > 0$ ), следуя [11], введем пространство  $DS(m)$  кусочно абсолютно непрерывных функций  $x: [0, T] \rightarrow R^n$ , представимых в виде

$$x(t) = \int_0^t z(s)ds + x(0) + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k, t_1)}(t) \Delta x(t_k), \quad (1)$$

где  $z \in L_n$ ,  $\Delta x(t_k) \equiv x(t_k) - x(t_k - 0)$ ,  $\chi_{[t_k, t_1)}(t)$  – характеристическая функция отрезка  $[t_k, T]$ . Элементы пространства  $DS^n(m)$  – это функции, абсолютно непрерывные на каждом из промежутков  $[0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_m, T]$  и непрерывные справа в точках  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Норму в  $DS(m)$  определим равенством

$$\|x\|_{DS(m)} = \|\dot{x}\|_L + |x(0)|_n + \sum_{k=1}^m |\Delta x(t_k)|_n,$$

$DS(m)$  – банахово пространство. Обозначим через  $AC[0, T]$  пространство абсолютно непрерывных функций  $x: [0, T] \rightarrow R^n$  с нормой  $\|x\|_{AC} = \|\dot{x}\|_L + |x(0)|_n$ . Пространство  $DS(m)$  является конечномерным расширением пространства  $AC[0, T]$ .

Для описания системы управления введем линейный оператор  $\mathcal{L}$ :

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int_0^t K(t,s)\dot{x}(s)ds + A(t,0)x(0). \quad (2)$$

Здесь элементы  $k_{ij}(t,s)$  ядра  $K(t,s)$  измеримы на множестве  $\{(t,s): 0 \leq s \leq t \leq T\}$  и таковы, что на этом множестве

$$|k_{ij}(t,s)| \leq \kappa(t), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где функция  $\kappa$  суммируема на  $[0, T]$ , элементы  $(n \times n)$ -матрицы  $A(t)$  суммируемы на  $[0, T]$ .

Оператор  $\mathcal{L}: DS(m) \rightarrow L$  ограничен. Функционально-дифференциальная система  $\mathcal{L}y = f$  охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра.

Пространство всех решений однородной системы  $(\mathcal{L}x)(t) = 0, t \in [0, T]$  имеет размерность  $n + mn$ . Пусть  $\{x_1, \dots, x_{n+mn}\}$  – базис в этом пространстве. Матрица  $X = \{x_1, \dots, x_{n+mn}\}$  называется фундаментальной матрицей (будем для определенности считать, что  $rX = E$ ). Главная краевая задача  $\mathcal{L}x = f, rx = \sigma$  однозначно разрешима при любых  $f \in L, \sigma \in R^{n+mn}$ , ее решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)\sigma + \int_0^t C(t,s)f(s)ds, \quad (3)$$

где  $C(t,s)$  – матрица Коши.

Пусть  $\ell: DS(m) \rightarrow R^N$  – линейный ограниченный вектор-функционал. Имеет место представление

$$\ell x = \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds + \Psi_0 x(0) + \sum_{k=1}^m \Psi_k \Delta x(t_k),$$

где элементы измеримой  $N \times n$ -матрицы ограничены в существенном, а  $\Psi_k, k = 0, \dots, m, - N \times n$ -матрицы с вещественными элементами.

Рассмотрим задачу управления

$$\mathcal{L}x = Fu + f, \quad x(0) = \alpha, \quad \ell x = \beta. \quad (4)$$

Здесь  $F: L_2 \rightarrow L$  – линейный ограниченный оператор,  $L_2$  – пространство функций  $u: [0, T] \rightarrow R^r$ , суммируемых с квадратом, в котором скалярное произведение определено равенством  $\langle u, v \rangle = \int_0^T u^T(t)v(t)dt$ ,  $\cdot^T$  – символ транспонирования. В задаче (4) цель управления задается вектор-функционалом  $\ell: DS(m) \rightarrow R^N$ , который на траектории системы  $\mathcal{L}x = Fu + f$  под действием управления должен принимать заданное значение  $\beta$ .

В этом обзоре мы ограничимся точной и полной формулировкой одной основной теоремы, дающей критерий разрешимости задачи управления (4). При описании остальных результатов даются ссылки на работы с подробным изложением и минимальные комментарии.

Для формулировки упомянутой теоремы введем обозначения:

$$\Theta(s) = \Phi(s) + \int_s^T \Phi(\tau) C'_\tau(\tau, s) d\tau,$$

$$\Xi = \int_0^T \Phi(s)\dot{X}(s)ds = (\Xi_1 | \Xi_2),$$

где  $\Xi_1 - N \times n$ -матрица, столбцами которой являются первые  $n$  столбцов  $N \times (n + mn)$ -матрицы  $\Xi$ ,

$$M = \int_0^T [F^* \Theta](s)[F^* \Theta]^T(s)ds,$$

$F^*: L^* \rightarrow L_2^*$  – оператор, сопряженный к

$F$ .

ТЕОРЕМА 2 ([47]). *Задача управления (4) разрешима тогда и только тогда, когда линейная алгебраическая система*

$$[\Xi_2 + (\Psi_1, \dots, \Psi_m)] \cdot \lambda + M \cdot \mu = \beta - \int_0^T \Theta(s)f(s)ds - (\Xi_1 + \Psi_0) \cdot \alpha \quad (5)$$

*разрешима относительно  $(nm + N)$ -вектора  $col(\lambda, \mu)$ . Каждое решение*

*$col(\lambda_0, \mu_0)$ ,  $\lambda_0 = col(\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^m)$ , системы (5) определяет управление, решающее задачу (4):*

$$\Delta x(t_k) = \lambda_0^k, \quad k = 1, \dots, m, \quad u(t) = [F^* \Theta]^T(t) \cdot \mu_0.$$

Поясним, как эта теорема может быть использована для решения задачи наведения системы управления в окрестность заданной нормативной траектории. Без ограничения общности можно считать, что роль нормативной траектории играет вектор-функция с компонентами, тождественно равными нулю (общий случай сводится к этому заменой фазовой переменной). Таким образом, достаточно рассмотреть случай наведения системы в окрестность нуля и удержания ее там в течение заданного времени. Зафиксируем момент времени  $T_1 \in (0, T)$  и сначала решим задачу управления

$$\mathcal{L}x = Fu + f, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = \alpha, \quad x(T_1) = 0. \quad (6)$$

В момент  $t = T_1$  система находится в состоянии, соответствующем нормативному. Если в этот момент убрать управляющее воздействие до конечного момента времени  $t = T$ , то есть положить  $u(t) = 0, t \in [T_1, T]$ , то даже при  $f(t) \equiv 0$  система с последствием не останется, вообще говоря, в нулевом положении (роль возмущения будет играть предыстория). Чтобы «удержать» систему в окрестности нулевого положения, можно воспользоваться тем, что число компонент целевого вектор-функционала в задаче (4) может быть произвольным. Добавим к условиям задачи (6) следующие условия:

$$\int_{T_1}^T V_j(s)x(s)ds = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu. \quad (7)$$

Здесь  $V_j = diag(v_j, \dots, v_j)$ ;  $v_1, \dots, v_\nu, \dots$  – система линейно независимых элементов пространства  $L_2[T_1, T]$ , линейная оболочка которых всюду плотна в этом пространстве. Можно показать, что при некоторых естественных условиях для любого заданного радиуса шаровой окрестности нуля в  $L_2[T_1, T]$  найдется такое число  $\nu$ , что условия (7) гарантируют для соответствующей траектории  $x$

принадлежность ее сужения на  $L_2[T_1, T]$  упомянутой окрестности.

В работе [23] рассмотрен случай, когда матрица  $M$  в условии (4) теоремы 1 обратима. В таком случае задача (3) разрешима в классе управлений  $u \in L_2$  при любом наборе допустимых импульсных воздействий, а сами импульсные воздействия могут быть использованы для минимизации заданного функционала общих затрат на управление. Отметим, что в задачах экономической динамики режим импульсного управления связан с возможностью изменять состояние системы (в стоимостном выражении) в некоторые моменты времени за счет одномоментного выделения соответствующих средств дополнительно к некоторому регулярному постоянному финансированию. При этом в функционале, характеризующем общие затраты на управление, можно учитывать конкретные обстоятельства финансирования, такие как, например, параметры кредитных программ. Как показывает пример, приведенный в [23], за счет одновременных финансовых воздействий можно достичь более экономных общих затрат на достижение поставленных целей.

В работе [29] обсуждается близкий вопрос о влиянии на общие затраты по управлению величины запаздывания в реализации управляющих воздействий и предлагается подход к решению задачи об оптимальной величине запаздывания в цепи управления.

В этой же работе, а также в работах [10; 31; 33; 34] для систем с дискретным временем решается задача о коррекции задачи управления, для которой в процессе исследования обнаружена ее противоречивость. Рассмотрены два вида коррекции – структурная (коэффициентная) и ресурсная. Предлагаемые процедуры коррекции основаны на результатах школы академика И.И. Еремина [18]. Следует отметить, что при исследовании реальных задач экономической динамики ситуация противоречивости возникает довольно часто [10].

Динамические модели, рассматриваемые в работах [25; 27; 28; 43], с одной стороны, представляют собой конкретные реализации абстрактных функционально-дифференциальных уравнений. С другой стороны, они охватывают широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом эффектов последствия (запаздывания) и импульсных возмущений (шоков), приводящих к скачкообразному изменению основных показателей функционирования изучаемой системы. Рассматриваемые модели, называемые в литературе гибридными, содержат одновременно как уравнения, описывающие динамику показателей в непрерывном времени на конечном промежутке (непрерывная подсистема), так и уравнения с дискретным временем (дискретная подсистема), характерным для эконометрических моделей. Для указанного класса систем исследуется вопрос о представлении решений, даются постановки

краевых задач как задач о достижимости заданных значений показателей, задач управления и приводятся условия разрешимости этих задач в форме, допускающей эффективное исследование с использованием современных компьютерных технологий. В работах [27; 28] основной результат состоит в описании множества управлений, решающих задачу управления гибридной системой в классе управлений, генерируемых подсистемой с дискретным временем. Вопросы оптимальной коррекции противоречивых задач управления для гибридных систем исследуются в работах [31; 32].

В работах [24; 48] изучается случай, когда система управления подвержена воздействию импульсных возмущений, приводящих к скачкам траектории, моменты времени и величины которых заранее неизвестны. Предлагается конструкция регулярного (не импульсного) управления, которое решает задачу управления с заданной системой целевых функционалов, несмотря на наличие импульсных воздействий. Считается, что информация о состоявшихся скачках становится известной к началу действия корректирующих управлений, которые являются позиционными по скачкам реализуемой траектории. Для последовательной компенсации возникающих скачков вводится обратная связь (дополнительные слагаемые в уравнениях движения). Предлагаемый подход к парированию импульсных возмущений и конструкции управления существенно опираются на фундаментальные результаты современной теории функционально-дифференциальных уравнений (теоремы о представлении решений линейных систем с последействием, свойства матрицы Коши, условия разрешимости задач управления с целевыми функционалами общего вида и широкими классами управляющих воздействий). Приводится пример, иллюстрирующий целесообразность введения процедуры парирования импульсных возмущений с использованием обратной связи. Решение задачи управления без использования такой процедуры требует больших ресурсов управления.

В работе [26] изучаются задачи о достижимости заданных значений показателей

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = \beta \quad (8)$$

(специальный случай задачи (4)) в постановке, при которой допускается приближенное выполнение целевых условий  $\ell x = \beta$  с заданным уровнем погрешности  $\varepsilon$ :  $|\ell x - \beta|_N \leq \varepsilon$ . Для задачи

$$\mathcal{L}x = f, \quad |\ell x - \beta|_N \leq \varepsilon$$

получены условия разрешимости в форме, позволяющей производить их проверку с помощью вычислительного эксперимента в ситуации, когда параметры целевых условий могут быть заданы неточно, с известными оценками погрешностей.

## 2. Задачи устойчивости

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [5; 6; 42] позволила дать ясное и лаконичное описание их основных свойств, в том числе свойства устойчивости решений. В то же время широ-

кие и актуальные для приложений классы линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости.

**2.1.** Рассмотрим сначала случай, когда одно уравнение – линейное разностное, определенное на дискретном множестве точек, а другое – линейное функционально-дифференциальное уравнение с последействием (ЛФДУП) на полуоси, и опишем для этого случая схему W-метода Н.В. Азбелева.

Обозначим через

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$$

бесконечную матрицу со столбцами  $y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots$  размерами  $n$ , а через  $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$  бесконечную матрицу со столбцами  $g(0), g(1), \dots, g(N), \dots$  размерами  $n$ .

Каждой бесконечной матрице

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$$

можно сопоставить вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + \dots + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

Аналогично, каждой бесконечной матрице  $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$  можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

Символом  $y(t) = y[t]$  обозначим вектор-функцию  $y(t) = y([t])$ ,  $t \in [-1, \infty)$ . Символом  $g[t]$  обозначим вектор-функцию  $g(t) = g([t])$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

Множество таких вектор-функций  $y[\cdot]$  обозначим символом  $\ell_0$ . Множество таких вектор-функций  $g[\cdot]$  обозначим символом  $\ell$ . Обозначим  $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$  при  $t \geq 1$ ,  $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$  при  $t \in [0, 1)$ .

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y &= \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y &= \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и ниже  $R^n$  – пространство векторов  $\alpha = \text{col}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$  с действительными компонентами и с нормой  $\|\alpha\|_{R^n}$ . Пусть пространство  $L$  локально суммируемых  $f: [0, \infty) \rightarrow R^n$  с полунормами  $\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{R^n} dt$  для всех  $T > 0$ . Пространство  $D$  локально абсолютно непрерывных

функций  $x: [0, \infty) \rightarrow R^n$  с полунормами  $\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{R^n}$  для всех  $T > 0$ .

Пусть пространство  $\ell$  вектор-функций

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

с полунормами  $\|g\|_{\ell_T} = \sum_{i=0}^T \|g_i\|_{R^n}$  для всех  $T \geq 0$ .

Пространство  $\ell_0$  вектор-функций

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + \dots + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

с полунормами  $\|y\|_{\ell_{0T}} = \sum_{i=-1}^T \|y_i\|_{R^n}$  для всех  $T \geq -1$ .

Операторы  $\mathcal{L}_{11}, F_{11}: D \rightarrow L$ ,

$\mathcal{L}_{12}, F_{12}: \ell_0 \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{21}, F_{21}: D \rightarrow \ell$ ,  $\mathcal{L}_{22}, F_{22}: \ell_0 \rightarrow \ell$  предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Обозначим  $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$ . Тогда (9) записывается в виде  $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$ .

Предположим, что для любых  $x(0) \in R^n$  и  $y(-1) \in R^n$  однозначно разрешима задача Коши для «модельной» системы  $\dot{x} = F_{11}^0 x + F_{12}^0 z + z$ ,  $\Delta y = F_{21}^0 z + F_{22}^0 y + u$ , где операторы  $F_{11}^0: D \rightarrow L$ ,  $F_{12}^0: \ell_0 \rightarrow L$ ,  $F_{21}^0: \ell_0 \rightarrow L$ ,  $F_{22}^0: \ell_0 \rightarrow L$  предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать так:  $\mathcal{L}_0\{x, y\} = \text{col}\{z, u\}$ . Пусть её решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathcal{W}: L \times \ell \rightarrow D \times \ell_0$  – непрерывный вольтерров оператор Коши для системы,  $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$ ,  $U: R^n \times R^n \rightarrow D \times \ell_0$  – фундаментальная матрица для системы,

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

Если элементы  $\text{col}\{x, y\}: [0, \infty) \times [-1, \infty) \rightarrow R^n \times R^n$  образуют банахово пространство  $\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \cong (\mathbf{B} \times R^n) \times (\mathbf{M} \times R^n)$  (пространство  $\mathbf{D} \subset D$ , пространство  $\mathbf{M}_0 \cong \mathbf{M} \oplus R^n \subset \ell_0$ , пространство  $\mathbf{B} \subset L$ , пространство  $\mathbf{M} \subset \ell$ ,  $\mathbf{B}, \mathbf{M}$  – банаховы пространства) обладают какими-нибудь специфическими свойствами, например  $\sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{R^n} + \sup_{k=-1,0,1,\dots} \|y(k)\|_{R^n} < \infty$ , и для уравнения  $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$  с линейным ограниченным оператором  $\mathcal{L}: \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{M}$  однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами. Это следует из приводимой ниже теоремы [35].

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $\mathcal{W} : \mathbf{B} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0$  – ограниченный оператор Коши задачи Коши для модельного уравнения  $\mathcal{L}_0\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$ ,  $\text{col}\{x(0), y(-1)\} = \text{col}\{0, 0\}$  и  $U$  – фундаментальная матрица модельного уравнения  $\mathcal{L}_0\{x, y\} = \text{col}\{0, 0\}$ . Здесь оператор  $\mathcal{L}_0 : \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{M}$ . Пусть далее линейный оператор  $\mathcal{L} : \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{M}$  ограничен,  $C$  – оператор Коши задачи Коши  $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$ ,  $\text{col}\{x(0), y(-1)\} = \text{col}\{0, 0\}$  и  $X$  – фундаментальная матрица уравнения  $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{0, 0\}$ . Тогда для выполнения равенства

$$\mathcal{W}\{\mathbf{B}, \mathbf{M}\} + U\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\} = C\{\mathbf{B}, \mathbf{M}\} + X\{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\} \quad (10)$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор  $\mathcal{L}\mathcal{W}$  (оператор  $\mathcal{W}\mathcal{L}$ ) имел ограниченный обратный

$$(\mathcal{L}\mathcal{W})^{-1} : \mathbf{B} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0$$

$$\left( (\mathcal{L}\mathcal{W})^{-1} : (\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0)^0 \rightarrow (\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0)^0 \right).$$

Здесь  $(\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0)^0 = \{\text{col}\{x, y\} \in \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 : \text{col}\{x(0), y(-1)\} = \text{col}\{0, 0\}\}$ .

**Следствие 1** ([35]). Если оператор  $\mathcal{L} : \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{M}$  ограничен и выполнено неравенство  $\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\mathcal{W}\|_{\mathbf{B} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{M}} < 1$  или выполнено неравенство  $\|\mathcal{W}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\|_{(\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0)^0 \rightarrow (\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0)^0} < 1$ , то выполняется равенство (10).

В случае равенства (10) (совпадения пространства решений модельного и исследуемого уравнений) мы говорим, что уравнение  $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$  обладает свойством  $\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0$  или, короче: уравнение  $\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0$  устойчиво.

Отметим связь понятия  $\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0$ -устойчивости с монографией Х.Л.Массеры и Х.Х.Шеффера о допустимости пар пространств [30], с монографией Е.А.Барбашина о сохранении свойств решений при накоплении возмущений [17].

Пусть модельное уравнение [1–6; 20]  $\mathcal{L}_1 x = z$  и банахово пространство  $\mathbf{B}$  с элементами из пространства  $L$  ( $\mathbf{B} \subset L$  и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами.

Пусть, например,  $\sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$ . Тогда, положив  $\overset{\text{def}}{\mathcal{L}_1} x = \dot{x} + x = z$ , принимаем в качестве банахова пространства  $\mathbf{B}$  банахово пространство  $L_\infty$  измеримых и ограниченных в существенном функций  $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой  $\text{vrai sup}_{t \geq 0} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$ . Пространство  $D(\mathcal{L}_1, L_\infty)$ , порожденное модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t) = (\mathcal{W}_1 z)(t) + (\mathcal{U}_1 \alpha)(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} z(s) ds + \alpha e^{-t} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^n, z \in L_\infty).$$

Эти решения ограничены ( $\sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$ )

и их производная  $\dot{x} = -x + z$  принадлежит пространству  $L_\infty$ . Все решения этого уравнения образуют банахово пространство с нормой

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_1, L_\infty)} = \text{vrai sup}_{t \geq 0} \|\dot{x}(t) + x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty,$$

которое линейно изоморфно пространству С.Л.Соболева  $W_\infty^{(1)}[0, \infty)$  с нормой

$$\|x\|_{W_\infty^{(1)}[0, \infty)} = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \text{vrai sup}_{t \geq 0} \|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Дальше будем это пространство обозначать как  $W_{L_\infty}$ . При этом  $W_{L_\infty} \subset D$ , и это вложение непрерывно.

Аналогично для банахова пространства  $\mathbf{B} \subset L$  можно ввести банахово пространство  $D(\mathcal{L}_1, \mathbf{B})$  с нормой

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_1, \mathbf{B})} = \|\dot{x} + x\|_{\mathbf{B}} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь вложение  $\mathbf{B} \subset L$  предполагается непрерывным. Предположим, что оператор  $\mathcal{W}_1$  непрерывно действует из пространства  $\mathbf{B}$  в пространство  $\mathbf{B}$ , и оператор  $\mathcal{U}_1$  действует из пространства  $\mathbb{R}^n$  в пространство  $\mathbf{B}$ . Это условие эквивалентно тому [1–4], что пространство  $D(\mathcal{L}_1, \mathbf{B})$  линейно изоморфно пространству С.Л.Соболева  $W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0, \infty)$  с нормой

$$\|x\|_{W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0, \infty)} = \|\dot{x}\|_{\mathbf{B}} + \|x\|_{\mathbf{B}}.$$

Дальше будем это пространство обозначать  $W_{\mathbf{B}}$ . При этом  $W_{\mathbf{B}} \subset D$ , и это вложение непрерывно.

Уравнение  $\mathcal{L}_1 x = z$  с оператором  $\mathcal{L}_1 : W_{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{B}$   $D(\mathcal{L}_1, \mathbf{B})$  устойчиво тогда и только тогда, когда оно сильно  $\mathbf{B}$ -устойчиво. Уравнение  $\mathcal{L}_1 x = z$  сильно  $\mathbf{B}$ -устойчиво, если для любого  $z \in \mathbf{B}$  каждое решение  $x$  этого уравнения обладает свойством  $x \in \mathbf{B}$  и  $\dot{x} \in \mathbf{B}$  [2, гл. IV, § 4.6; 4].

**2.2.** Рассмотрим схему пункта 2.1 для двух уравнений (9). Операторы  $\mathcal{L}_{11} : D \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{21} : D \rightarrow \ell$ ,  $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \rightarrow \ell$  рассматриваются как приведения на пары  $(W_{\mathbf{B}}, \mathbf{B})$ ,  $(\mathbf{M}_0, \mathbf{B})$ ,  $(W_{\mathbf{B}}, \mathbf{M})$ ,  $(\mathbf{M}_0, \mathbf{M})$ . Эти операторы предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными.

Предположим, что общее решение уравнения  $\mathcal{L}_{22} y = g$  для  $g \in \mathbf{M}$  принадлежит пространству  $\mathbf{M}_0$  и представляется формулой Коши

$$y[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^{[t]} C_{22}[t, s]g[s].$$

Обозначим

$$(C_{22}g)[t] = \sum_{s=0}^{[t]} C_{22}[t, s]g[s],$$

$$(Y_{22}y(-1))[t] = Y_{22}[t]y(-1).$$

Тогда каждое решение  $y$  второго уравнения в (9) имеет вид

$$y = -C_{22}\mathcal{L}_{21}x + Y_{22}y(-1) + C_{22}g.$$

Подставим в первое уравнения в (9):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y &= \mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}C_{22}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) + \mathcal{L}_{12}C_{22}g = f, \\ \mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}C_{22}\mathcal{L}_{21}x &= f_1 = f - \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) - \mathcal{L}_{12}C_{22}g. \end{aligned}$$

Введем обозначение  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}C_{22}\mathcal{L}_{21}$ , тогда первое уравнения в (9) примет вид  $\mathcal{L}x = f_1$ .

Предположим, что вольтерров оператор  $\mathcal{L} : (\mathbf{W}_B)^0 \rightarrow \mathbf{B}$  вольтеррово обратим (задача Коши для уравнения  $\mathcal{L}x = f_1$  обладает свойством: при любом  $f_1 \in \mathbf{B}$  ее решения  $x \in \mathbf{W}_B$ ). Таким образом, мы решили задачу в случае, когда для уравнения (9) при любом  $\{f, g\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{M}$  ее решения  $\{x, y\} \in \mathbf{W}_B \times \mathbf{M}$ .

**Пример 1.** Рассмотрим два уравнения:

$$\dot{x}(t) + ax(t) + by[t] = f(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (11)$$

$$y[t] - dy[t-1] + cx[t] = g[t], \quad t \in [0, \infty).$$

Причем

$$\begin{aligned} y(0) - dy(-1) + c(0) &= y[0] - dy[0-1] + cx[0] = \\ &= g[0] = g(0), \quad t \in [0, 1). \end{aligned}$$

Введем пространства:

$$\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 : \|y\|_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1, 0, 1, \dots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\},$$

$$\ell_{\infty} = \{g \in \ell : \|g\|_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0, 1, \dots} \|g(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}.$$

Введем оператор  $(Sy)(t) = dy(t-1)$ ,  $t \geq 1$ ,  $(Sy)(t) = 0$ ,  $t \in [0, 1)$ , тогда второе уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} y(t) - (Sy)(t) + cx(t) &= \\ = g_1(t) = g(t) + dy(t-1), \quad t \in [0, 1), \\ y(t) - (Sy)(t) + cx(t) &= g(t), \quad t \in [1, \infty). \end{aligned}$$

Рассмотрим оператор  $S : \ell_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}$ . Известно, что оператор  $(I - S) : \ell_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}$  вольтеррово обратим тогда и только тогда, когда спектральный радиус оператора  $\rho_{\ell_{\infty}}(S)$  в пространстве  $\ell_{\infty}$  меньше единицы. Для оператора  $S$  условие  $\rho_{\ell_{\infty}}(S) < 1$  эквивалентно неравенству  $|d| < 1$  [38, с. 87, с. 140].

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{11}x)(t) &= \dot{x}(t) + ax(t), \quad t \geq 0, \\ (\mathcal{L}_{12}y)[t] &= by[t], \quad t \geq 0, \\ (\mathcal{L}_{21}x)(t) &= cx[t], \quad t \geq 0, \\ (\mathcal{L}_{22}y)[t] &= y[t] - (Sy)[t], \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Построим функцию Коши  $C_{22}$  и фундаментальное решение  $Y_{22}$  для уравнения  $y[t] - dy[t-1] = g[t]$ :

$$\begin{aligned} y[t] &= d^{t+1}y(-1) + \sum_{s=0}^{[t]} g(s)d^{[t]-s} = \\ &= Y_{22}[t]y(-1) + (C_{22}g)[t]. \end{aligned}$$

Отсюда выразим  $y[t]$  из второго уравнения системы (11):

$$y[t] = d^{t+1}y(-1) + \sum_{s=0}^{[t]} (g[s] - cx[s])d^{[t]-s} =$$

$$= Y_{22}[t]y(-1) + (C_{22}(g - cx))[t].$$

Подставляя найденное  $y$  в первую формулу в (9) (или (11)), получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{11}x)(t) + (\mathcal{L}_{12}y)[t] &= \dot{x}(t) + ax(t) + \\ + bd^{t+1}y(-1) + b \sum_{s=0}^{[t]} (g[s] - cx[s])d^{[t]-s} &= f(t). \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}x)(t) &= ((\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}C_{22}\mathcal{L}_{21})x)(t) = \dot{x}(t) + ax(t) - \\ - bc \sum_{s=0}^{[t]} x[s]d^{[t]-s} &= f_1(t) = f(t) - bd^{t+1}y(-1) - \\ - b \sum_{s=0}^{[t]} g[s]d^{[t]-s}. \end{aligned}$$

Видно, что  $f_1 \in L_{\infty}$ , если  $|d| < 1$ .

Запишем формулу Коши для уравнения

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) = bc \sum_{s=0}^{[t]} x[s]d^{[t]-s} + f_1(t):$$

$$\begin{aligned} x(t) &= X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t, s) (bc \sum_{i=0}^{[s]} x[i]d^{[s]-i} + \\ &+ f_1(s)) ds. \end{aligned}$$

Будем иметь  $X_{11}(t) = e^{-at}$ ,  $C_{11}(t, s) = e^{-a(t-s)}$ .

Для случая положительного  $a$  имеем оценку

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t C_{11}(t, s) bc \sum_{i=0}^{[s]} x[i]d^{[s]-i} ds \right| &\leq \\ \leq \sup_{t \geq 0} \left( |bc| e^{-at} \int_0^t e^{as} \sum_{i=0}^{[s]} |d|^{[s]-i} ds \cdot \|x\|_{L_{\infty}} \right) &\leq \\ \leq |bc| \cdot \frac{1}{1-|d|} \cdot \sup_{t \geq 0} e^{-at} \int_0^t e^{as} ds \cdot \|x\|_{L_{\infty}} &\leq \\ \leq \frac{1}{a} \cdot |bc| \cdot \frac{1}{1-|d|} \cdot \|x\|_{L_{\infty}}. \end{aligned}$$

Получаем, что норма оператора  $bC_{11}cC_{22}$  меньше 1, если

$$|bc| < a(1 - |d|).$$

Таким образом, для любого  $f_1 \in L_{\infty}$  решение  $x$  задачи  $\mathcal{L}x = f_1$  принадлежит пространству  $L_{\infty}$ , и, кроме того, производная решения  $\dot{x}$  принадлежит пространству  $L_{\infty}$ . Тем самым установлено, что для любого  $f_1 \in L_{\infty}$  решение  $x$  задачи  $\mathcal{L}x = f_1$  принадлежит пространству  $W_{L_{\infty}}$ .

Итак, получены условия, при которых для уравнения (11) при любом  $\{f, g\} \in L_{\infty} \times \ell_{\infty}$  ее решение  $\{x, y\} \in \mathbf{D} \cong W_{L_{\infty}} \times \ell_{\infty 0}$ .

**2.3.** Используем возможность сведения гибридной системы к линейному разностному уравнению, определенному на дискретном множестве точек.

Для уравнения (9) будем пользоваться такими обозначениями, которые приняты в пунктах 2.1 и 2.2.

Предположим, что общее решение уравнения  $\mathcal{L}_{11}x = f$  для  $f \in L$  принадлежит пространству  $D$  и представляется формулой Коши:

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)f(s)ds.$$

Обозначим,

$$(C_{11}f)(t) = \int_0^t C_{11}(t,s)f(s)ds,$$

$$(X_{11}x(0))(t) = X_{11}(t)x(0),$$

тогда для  $x \in D$  верно представление

$$x = X_{11}x(0) + C_{11}f.$$

Из первого уравнения в (9) найдем  $x$ :

$$x = -C_{11}L_{12}y + X_{11}x(0) + C_{11}f.$$

Воспользуемся этой подстановкой во втором уравнении (9):

$$\begin{aligned} L_{21}x + L_{22}y &= \\ &= -L_{21}C_{11}L_{12}y + L_{21}X_{11}x(0) + L_{21}C_{11}f + L_{22}y = g, \\ -L_{21}C_{11}L_{12}y + L_{22}y &= g_1 = g - L_{21}X_{11}x(0) - L_{21}C_{11}f. \end{aligned}$$

Введем обозначение  $\mathcal{L} = L_{22} - L_{21}C_{11}L_{12}$ , тогда второе уравнения в (9) примет вид  $\mathcal{L}y = g_1$ .

Предположим, что вольтерров оператор  $\mathcal{L}: (\mathbf{M}_0)^0 \rightarrow \mathbf{M}$  вольтеррово обратим (задача Коши для уравнения  $\mathcal{L}y = g_1$  однозначно разрешима при любом  $g_1 \in \mathbf{M}$  ее решение  $x \in \mathbf{M}_0$ ). Таким образом, получены условия, при которых для уравнения (9) при любом  $\{f, g\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{M}$  имеем  $\{x, y\} \in \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0$ .

**Пример 2.** Рассмотрим два уравнения:

$$\dot{x}(t) + ax(t) + by[t] = f(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (12)$$

$$y[t] - dy[t-1] + cx[t] = g[t], \quad t \in [0, \infty).$$

Воспользовавшись формулой Коши для  $x$  получаем, что первое уравнение в системе (12) записывается в виде

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)(f(s) - by[s])ds,$$

или

$$x(t) = e^{-at}x(0) + \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - by[s])ds.$$

Подставим  $x$  во второе уравнение в системе (12):

$$\begin{aligned} y[t] - dy[t-1] + ce^{-at}x(0) + \\ + \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - by[s])ds &= g[t], \\ y[t] - dy[t-1] - bc \int_0^t e^{-a(t-s)}y[s]ds &= g_1[t] = \\ = g[t] - ce^{-at}x(0) - c \int_0^t e^{-a(t-s)}f(s)ds. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} bc \int_0^t e^{-a(t-s)}y[s]ds &= bce^{-at} \int_0^t e^{as}y[s]ds = \\ = bce^{-at} \sum_{i=0}^{[t]-1} y[i] \int_i^{i+1} e^{as}ds &= bce^{-at} \sum_{i=0}^{[t]-1} y[i] \int_i^{i+1} e^{as}ds = \end{aligned}$$

$$= bce^{-at} \sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{a(i+1)} - e^{ai})/a =$$

$$= \frac{bc}{a} \sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a(t-i-1)} - e^{-a(t-i)}).$$

Получаем уравнение

$$\begin{aligned} y[t] - dy[t-1] - \frac{bc}{a} \sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a(t-i-1)} - e^{-a(t-i)}) &= \\ = g_1[t], \quad t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Обозначим

$$(Ky)[t] = \frac{bc}{a} \sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a(t-i-1)} - e^{-a(t-i)}).$$

Предположим, что  $a > 0$ . Найдем оценку нормы  $\|K\|_{\ell_{\infty 0} \rightarrow \ell_{\infty}}$ :

$$\begin{aligned} \|Ky\|_{\ell_{\infty}} &= \sup_{k=0,1,2,\dots} \left| \frac{bc}{a} \sum_{i=0}^{[k]-1} y[i](e^{-a(k-i-1)} - e^{-a(k-i)}) \right| \leq \\ \leq \|y\|_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a} \sup_{k=0,1,2,\dots} (1 - e^{-ak}) &= \|y\|_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a}. \end{aligned}$$

Далее оценим норму  $\|(I-S)^{-1}K\|_{\ell_{\infty 0} \rightarrow \ell_{\infty}}$ :

$$\begin{aligned} \|(I-S)^{-1}K\|_{\ell_{\infty 0} \rightarrow \ell_{\infty}} &\leq \|(I-S)^{-1}\|_{\ell_{\infty 0} \rightarrow \ell_{\infty 0}} \cdot \|K\|_{\ell_{\infty 0} \rightarrow \ell_{\infty}} \leq \\ &\leq \frac{1}{1-d} \cdot \frac{|bc|}{a}. \end{aligned}$$

Получаем, что норма оператора  $\|(I-S)^{-1}K\|_{\ell_{\infty 0} \rightarrow \ell_{\infty}}$  меньше 1, если  $|bc| < a(1-d)$ .

Получили, что для любого  $g_1 \in \ell_{\infty}$  решение  $y$  уравнения  $\mathcal{L}y = g_1$  принадлежит пространству  $\ell_{\infty}$ .

Таким образом, получены условия, при которых для системы (12) при любом  $\{f, g\} \in L_{\infty} \times \ell_{\infty}$  ее решение  $\{x, y\} \in W_{L_{\infty}} \times \ell_{\infty 0}$ .

**2.4.** Используем теперь возможность сведения исходной гибридной системы к вспомогательному линейному интегральному уравнению на основе  $W$ -метода.

Будем применять следствие 1 из пункта 2.1.

**Пример 3.** Рассмотрим два уравнения:

$$\dot{x}(t) + ax(t) + by[t] = f(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (13)$$

$$y[t] - dy[t-1] + cx[t] = g[t], \quad t \in [0, \infty).$$

Воспользовавшись формулой Коши для  $x$  получаем, что первое уравнение в системе (13) записывается в виде

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)(f(s) - by[s])ds,$$

$$x = X_{11}x(0) + C_{11}(f - by).$$

Построим функцию Коши  $C_{22}$  и фундаментальное решение  $Y_{22}$  для уравнения  $y[t] - dy[t-1] = g[t]$ :

$$\begin{aligned} y[t] &= d^{t+1}y(-1) + \sum_{s=0}^{[t]} g(s)d^{t-s} = \\ &= Y_{22}[t]y(-1) + (C_{22}g)[t]. \end{aligned}$$



Отсюда выразим  $y[t]$  из второго уравнения системы (13):

$$y[t] = d^{t+1}y(-1) + \sum_{s=0}^{[t]} (g[s] - cx[t])d^{[t]-s},$$

$$y = Y_{22}y(-1) + C_{22}(g - cx).$$

Возьмем модельное уравнение в виде системы

$$\dot{x}(t) + ax(t) = f(t), \quad t \in [0, \infty),$$

$$y[t] - dy[t-1] = g[t], \quad t \in [0, \infty).$$

Известно, что, когда  $a > 0$  и  $|d| < 1$ , эта система будет обладать свойством: при любом  $f \in L_\infty$ ,  $g \in \ell_\infty$  имеем  $x \in W_{L_\infty}$ ,  $y \in \ell_{\infty 0}$ .

Проверим, когда это свойство выполнено для системы (13). Для этого достаточно проверить утверждение следствия 1 из пункта 2.2: если справедливо

$$\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\mathcal{W}\|_{L_\infty \times \ell_\infty \rightarrow L_\infty \times \ell_\infty} < 1$$

или

$$\|\mathcal{W}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\|_{(W_{L_\infty} \times \ell_{\infty 0})^0 \rightarrow (W_{L_\infty} \times \ell_{\infty 0})^0} < 1,$$

то оператор  $\mathcal{L}\mathcal{W}$  (оператор  $\mathcal{W}\mathcal{L}$ ) имеет ограниченный обратный

$$(\mathcal{L}\mathcal{W})^{-1} : L_\infty \times \ell_\infty \rightarrow L_\infty \times \ell_\infty$$

$$((\mathcal{W}\mathcal{L})^{-1} : (W_{L_\infty} \times \ell_{\infty 0})^0 \rightarrow (W_{L_\infty} \times \ell_{\infty 0})^0).$$

Здесь

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} 0 & by[t] \\ cx[t] & 0 \end{pmatrix}.$$

**Первый вариант.** Рассмотрим случай, когда выполнено второе условие.

В силу леммы 2.4.2 книги [2] (леммы 2 статьи [1]) вместо  $W_{L_\infty} \times \ell_{\infty 0}$ -устойчивости системы (13) можно изучать  $C \times \ell_{\infty 0}$ -устойчивость этой системы. Здесь  $C = C[0, \infty)$  – банахово пространство ограниченных функций  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой  $\|x\|_C = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ .

Перемножим:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & by[t] \\ cx[t] & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (C_{11}by)(t) \\ (C_{22}cx)[t] & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим:

$$(C_{11}by)(t) = b \int_0^t e^{-a(t-s)} y[s] ds,$$

$$(C_{22}cx)[t] = c \sum_{s=0}^{[t]} x[s] d^{[t]-s}.$$

Оценим норму оператора  $\|C_{11}b\|_{\ell_{\infty 0} \rightarrow L_\infty}$ :

$$\begin{aligned} |b| \sup_{t \geq 0} |(C_{11}y)(t)| &= |b| \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t e^{-a(t-s)} y[s] ds \right| = \\ &= |b| \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^{[t]+[t]} e^{-a([t]+[t]-s)} y[s] ds \right| = \\ &= |b| \sup_{t \geq 0} \left( \int_{[t]}^{[t]} e^{-a([t]+[t]-s)} |y[s]| ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{[t]} e^{-a([t]+[t]-s)} |y[s]| ds \right) \leq \\ &\leq |b| \sup_{t \geq 0} \int_0^{[t]} e^{-a([t]+[t]-s)} |y[s]| ds + \\ &\quad + |b| \sup_{t \geq 0} \int_0^{[t]} e^{-a([t]+[t]-s)} |y[s]| ds \leq \\ &\leq |b| \sup_{t \geq 0} e^{-a[t]} \int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)} |y[s]| ds + \\ &\quad + |b| \cdot |y(0)| \sup_{t \geq 0} e^{-at} \int_0^t e^{as} ds \leq \\ &\leq |b| \sup_{t \geq 0} e^{-a[t]-a[t]} \sum_{i=0}^{[t]-1} |y[i]| \int_i^{i+1} e^{as} ds + |b| \cdot |y(0)| \frac{e^a - 1}{a} \leq \\ &\leq \frac{|b|}{a} \sup_{t \geq 0} e^{-a[t]-a[t]} \sum_{i=0}^{[t]-1} |y[i]| (e^{a(i+1)} - e^{ai}) + |b| \cdot |y(0)| \frac{e^a - 1}{a} \leq \\ &\leq \frac{|b|}{a} \sup_{t \geq 0} e^{-a[t]-a[t]} \sum_{i=0}^{[t]-1} (e^{a(i+1)} - e^{ai}) ds \cdot \|y\|_{\ell_\infty} + \\ &\quad + |b| \cdot |y(0)| \frac{e^a - 1}{a} \leq \\ &\leq \frac{|b|}{a} \sup_{t \geq 0} e^{-a[t]} \cdot \sup_{k=0,1,2,\dots} \sum_{i=0}^{k-1} (e^{-a(k-i-1)} - e^{-a(k-i)}) \cdot \|y\|_{\ell_\infty} + \\ &\quad + |b| \cdot |y(0)| \frac{e^a - 1}{a} \leq \\ &\leq \frac{|b|}{a} \sup_{t \geq 0} e^{-a[t]} \cdot \sup_{k=0,1,2,\dots} (1 - e^{-ak}) \cdot \|y\|_{\ell_\infty} + \\ &\quad + |b| \cdot |y(0)| \frac{e^a - 1}{a} \leq \frac{|b|}{a} \max\{1, e^a - 1\} \|y\|_{\ell_{\infty 0}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $0 < a \leq \ln 2$ , то

$$\|C_{11}b\|_{\ell_{\infty 0} \rightarrow L_\infty} < \frac{|b|}{a}.$$

Оценим норму оператора  $\|C_{22}c\|_{C \rightarrow L_\infty}$ :

$$\sup_{t \geq 0} \left| c \sum_{i=0}^{[t]} x[i] d^{[t]-i} \right| \leq |c| \cdot \sup_{t \geq 0} \sum_{i=0}^{[t]} |d|^{[t]-i} \cdot \|x\|_C \leq$$

$$\leq |c| \cdot \frac{1}{1-|d|} \cdot \|x\|_C,$$

$$\|C_{22}c\|_{C \rightarrow L_\infty} \leq |c| \cdot \frac{1}{1-|d|}.$$

Если в пространстве  $\mathbb{R}^2$  норму определять тремя различными способами –

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x, y)\|_2 = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\},$$

то соответствующие нормы матрицы  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  имеют вид

$$\|A\|_1 = \sup\{|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\},$$

$$\|A\|_2 \leq (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2)^{1/2},$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\}.$$

Пусть  $0 < a \leq \ln 2$ . Тогда в соответствии с тремя упомянутыми нормами получаем три оценки нормы оператора  $\mathcal{W}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)$ :

$$\|\mathcal{W}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\|_{(C \times \ell_{\infty 0})^0 \rightarrow (C \times \ell_{\infty 0})^0} \leq \frac{|b|}{a} + \frac{|c|}{1 - |d|},$$

$$\|\mathcal{W}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\|_{(C \times \ell_{\infty 0})^0 \rightarrow (C \times \ell_{\infty 0})^0} \leq \left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{(1 - |d|)^2} \right)^{1/2},$$

$$\|\mathcal{W}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\|_{(C \times \ell_{\infty 0})^0 \rightarrow (C \times \ell_{\infty 0})^0} \leq \max \left\{ \frac{|b|}{a}, \frac{|c|}{1 - |d|} \right\}.$$

Итак, при  $0 < a \leq \ln 2$  получаем три условия устойчивости – либо  $\frac{|b|}{a} + \frac{|c|}{1 - |d|} < 1$ , либо

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{(1 - |d|)^2} < 1, \text{ либо } \max \left\{ \frac{|b|}{a}, \frac{|c|}{1 - |d|} \right\} < 1.$$

**Второй вариант.** Получим условия, при выполнении которых будет иметь место оценка  $\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\mathcal{W}\|_{L_\infty \times \ell_\infty \rightarrow L_\infty \times \ell_\infty} < 1$ . Используя обозначения  $(\bar{Y})(t) = y[t]$  и  $(\bar{X})(t) = x[t]$ , имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & b\bar{I} \\ c\bar{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} b(C_{22}y)[t] \\ c(C_{11}x)[t] \end{pmatrix}$$

и

$$c(C_{11}x)[t] = c \int_0^t e^{-a(t-s)} x(s) ds,$$

$$b(C_{22}y)[t] = b \sum_{s=0}^{[t]} y[s] d^{[t]-s}.$$

Оценим норму оператора  $\|cC_{11}\|_{L_\infty \rightarrow \ell_\infty}$ .

Пусть  $a > 0$ .

Вычислим интеграл:

$$\left| c \int_0^{[t]} e^{-a(t-s)} x(s) ds \right| = c e^{-a[t]} \int_0^{[t]} e^{as} x(s) ds =$$

$$= c e^{-a[t]} \sum_{i=0}^{[t]-1} \int_i^{i+1} e^{as} x(s) ds \leq$$

$$\leq c |e^{-a[t]}| \sum_{i=0}^{[t]-1} \|x\|_{L_\infty[i, i+1]} \int_i^{i+1} e^{as} ds =$$

$$= c |e^{-a[t]}| \sum_{i=0}^{[t]-1} \|x\|_{L_\infty[i, i+1]} (e^{a(i+1)} - e^{ai}) / a =$$

$$= \frac{|c|}{a} \sum_{i=0}^{[t]-1} \|x\|_{L_\infty[i, i+1]} (e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}).$$

Обозначим

$$(Kx)[t] = \frac{|c|}{a} \sum_{i=0}^{[t]-1} \|x\|_{L_\infty[i, i+1]} (e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}).$$

Найдем оценку нормы  $\|K\|_{L_\infty \rightarrow \ell_\infty}$ :

$$\|Kx\|_{\ell_\infty} = \sup_{[t]=1, 2, \dots} \left| \frac{c}{a} \sum_{i=0}^{[t]-1} \|x\|_{L_\infty[i, i+1]} (e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}) \right| \leq$$

$$\leq \|y\|_{\ell_\infty 0} \cdot \frac{|bc|}{a} \sup_{k=0, 1, 2, \dots} (1 - e^{-ak}) = \|x\|_{L_\infty} \cdot \frac{|c|}{a}.$$

Оценим норму оператора  $\|bC_{22}\|_{\ell_\infty \rightarrow L_\infty}$ :

$$\sup_{t \geq 0} \left| b \sum_{i=0}^{[t]} y[i] d^{[t]-i} \right| \leq |b| \cdot \sup_{t \geq 0} \sum_{i=0}^{[t]} |d|^{[t]-i} \cdot \|y\|_{\ell_\infty} \leq$$

$$\leq |b| \cdot \frac{1}{1 - |d|} \cdot \|y\|_{\ell_\infty},$$

$$\|bC_{22}\|_{\ell_\infty \rightarrow L_\infty} \leq |b| \cdot \frac{1}{1 - |d|}.$$

Рассмотрим отдельно три случая определения нормы в пространстве  $\mathbb{R}^2$ :  $\|(\cdot, \cdot)\|_1$ ,  $\|(\cdot, \cdot)\|_2$ ,  $\|(\cdot, \cdot)\|_\infty$ .

Пусть  $a > 0$ , в случае первой нормы получаем

$$\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\mathcal{W}\|_{L_\infty \times \ell_\infty \rightarrow L_\infty \times \ell_\infty} \leq \frac{|c|}{a} + \frac{|b|}{1 - |d|},$$

в случае второй нормы получаем

$$\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\mathcal{W}\|_{L_\infty \times \ell_\infty \rightarrow L_\infty \times \ell_\infty} \leq \left( \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{(1 - |d|)^2} \right)^{1/2},$$

в случае третьей нормы получаем

$$\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\mathcal{W}\|_{L_\infty \times \ell_\infty \rightarrow L_\infty \times \ell_\infty} \leq \max \left\{ \frac{|c|}{a}, \frac{|b|}{1 - |d|} \right\}.$$

Итак, при  $a > 0$  получаем три условия устойчивости:  $\frac{|c|}{a} + \frac{|b|}{1 - |d|} < 1$ ,  $\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{(1 - |d|)^2} < 1$ ,

$$\max \left\{ \frac{|c|}{a}, \frac{|b|}{1 - |d|} \right\} < 1.$$

Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (13) при любом  $\{f, g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$  ее решения  $\{x, y\}$  оказываются элементами пространства  $W_{L_\infty \times \ell_\infty 0}$ .

История вопроса об устойчивости решений для линейных разностных уравнений и для ЛФДУП представлена в работе [36]. Там же описывается применение линейного ГФДСП для моделирования инвестиционного развития высокотехнологических производств.

### 3. Программные средства моделирования и анализа

В этом разделе мы ограничиваемся недавними результатами исследования некоторых актуальных прикладных задач и описанием разработанных программных средств.

#### 3.1. Задачи построения моделей внутренних рейтингов

Задача, связанная с построением внутренней рейтинговой модели компаний, решает ряд практических аспектов построения IRB-моделей, связанных с определением параметров дискретизации и динамических преобразований факторов, использованием в качестве факторов макроэконо-

мических переменных и маппингом модели с международной шкалой.

Важным этапом внедрения IRB-подхода является разработка качественной модели оценки вероятности дефолта компаний-контрагентов, позволяющей эффективно оценивать их кредитное качество. Разработка такой модели является нетривиальной задачей и может быть связана с множеством технических деталей и сложностей. Алгоритм построения модели вероятности дефолта состоит из следующих этапов:

1. Определение набора потенциальных факторов модели: групп финансовых коэффициентов, макропоказателей; расчет отобранных финансовых коэффициентов на данных отчетности.

2. Анализ финансовых коэффициентов (построение ROC-кривых, расчет коэффициентов Area Under Curve (AUC), отбор показателей, имеющих максимальную предсказательную силу, анализ выбросов, проведение процедуры дискретизации).

3. Перебор всевозможных вариантов модели логистической регрессии, оцениваемых только с использованием финансовых коэффициентов, выбор наилучшего варианта модели.

4. Добавление в модель, определенную на шаге 3, макрофакторов, выбор наилучшего варианта модели.

5. Оценка устойчивости коэффициентов модели на различных периодах.

В работе [38] при построении модели вероятности дефолта было рассмотрено 18 финансовых коэффициентов, которые можно разделить на следующие группы:

- коэффициенты структуры капитала и долговой нагрузки;
- коэффициенты рентабельности;
- коэффициенты ликвидности;
- коэффициенты оборачиваемости;
- коэффициенты масштаба деятельности.

Выборка, на которой производился анализ и построение модели вероятности дефолта, содержит данные годовой отчетности (1,2 формы) за 7 лет для более чем 8 тысяч российских компаний нефинансового сектора: всего порядка 50 тысяч наблюдений с долей дефолтных наблюдений на уровне 2,3%. Деление исходной выборки на обучающую и контрольную производилось в соотношении 70%/30% с требованием равного уровня дефолтности внутри каждой подвыборки.

Авторами была построена серия моделей, позволяющих достичь точности прогнозирования на уровне 80–90% по критерию AUC [46]. Полученные результаты были применены в интересах различных заказчиков из реального и банковского секторов.

По результатам эмпирического исследования авторы сформулировали ряд практических выводов:

1. Предсказательная сила факторов может значительно снижаться при переходе к динамическим преобразованиям (приростам, темпам прироста).

2. Дискретизация значений факторов позволяет повысить их предсказательную силу и перейти к монотонной ROC-кривой.

3. Макроэкономические факторы целесообразно включать в модель в том случае, когда выборка репрезентативна по отношению к макроэкономическому циклу.

Задачи построения моделей были решены с использованием программного комплекса «ПРО-ГНОЗ. Кредитный риск», который обеспечивает полную информационную и аналитическую поддержку процедуры анализа финансового состояния контрагентов и позволяет проводить переоценки моделей с различными показателями и по различным группам контрагентов (рис. 1).

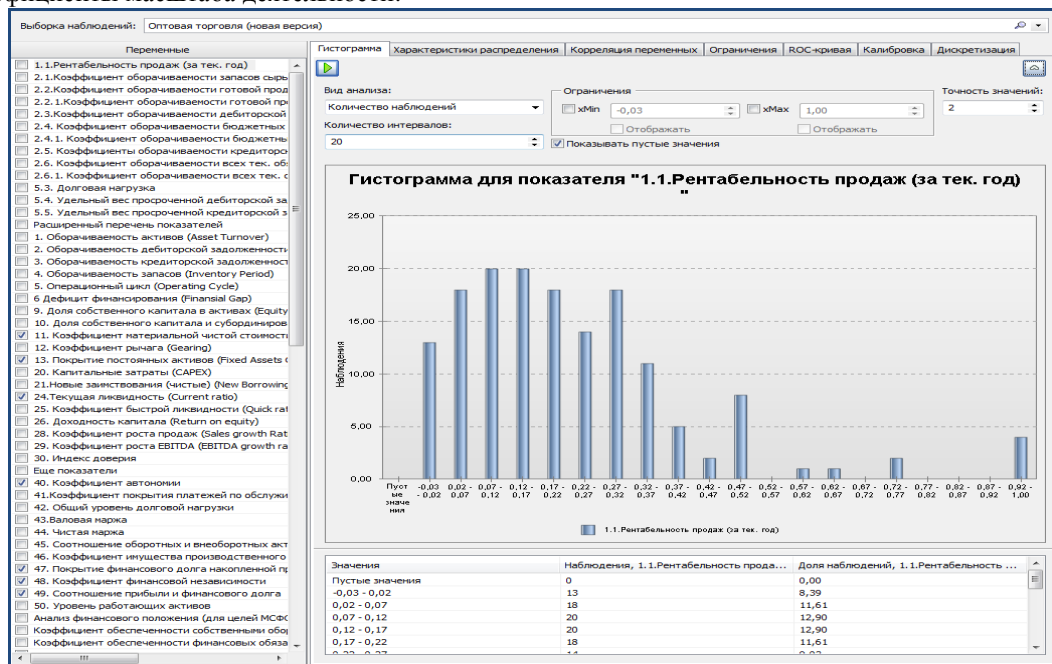


Рис. 1. Интерфейс программного комплекса для построения моделей внутреннего рейтинга

### 3.2. Задачи анализа шоковых явлений и механизмов их возникновения

Одной из наиболее актуальных проблем современной экономической теории является понимание механизма формирования цен. Существует множество работ, посвященных изучению стилизованных фактов ценовых рядов, но причина существования этих фактов до сих пор неясна. Логично предположить, что изучение динамики рыночных характеристик околоченовых шоков может дать ценную информацию для понимания природы данного явления. На основе использования статистического подхода мы попытались ответить на вопрос: «Что происходит в непосредственной близости (при рассмотрении высокочастотных данных) от крупных ценовых скачков?» Попытка исследовать шоки и до-, послешоковое рыночное поведение не является новой. Понятие рыночного шока относительно и должно рассматриваться в неразрывной связи с временной шкалой и уровнем локальной волатильности. В рамках исследования [37] рассматривалось три типа событий, тип события определяется соответствующей временной шкалой (уровень часов, минут и тиков). Далее они обозначались как макро-, мезо- и микрособытия соответственно и анализировались четыре ключевых рыночных метрики (цена, торговый дисбаланс, торговый объем, бид-аск спрэд) в непосредственной близости от этих событий.

В рамках исследований [45] было определено три временных шкалы:

- уровень часов (обозначим его как макроуровень);
- уровень минут (мезоуровень);
- уровень тиков (микроуровень).

С целью идентификации событий на макро- и мезоуровнях был сгенерирован ряд минутных цен, которые рассчитывались как полусумма лучшей цены на покупку и лучшей цены на продажу на конец каждой минуты. На микроуровне была использована тиковая динамика цены, под тиком мы понимали любое изменение цены вследствие исполнения заявок.

С целью идентификации шоков на макроуровне объединялись два фильтра (абсолютный и относительный) и рассматривали изменение цены как шок, если происходило одновременное срабатывание фильтров.

Чтобы определить экстремальное событие на мезоуровне, использовался фильтр, который сравнивает абсолютное значение минутной доходности со скользящим средним этого показателя. Шок определялся моментом времени, когда абсо-

лютное значение минутной доходности в  $s$  раз превышает скользящее среднее минутной доходности.

На тиковой шкале мы применили методологию Napex, которая определяет снижение (повышение) цены как шок, если цена снижалась (росла) как минимум 10 тиков подряд до смены тенденции в течение 2 секунд и изменение цены превышает 0,8%. Под тиком понимается изменение цены, вызванное сделкой (сделками). Для применения данного типа фильтрации был сгенерирован ряд тиковых цен, построенный на основе данных по сделкам.

На макроуровне за четыре анализируемых месяца было идентифицировано 1820 событий. На мезоуровне было идентифицировано 13 368 событий, 461 в среднем по каждой акции, или 5,5 событий в день. Аналогично макрошкале, частота идентифицированных событий различается значительно между акциями: от 0,4 до 17 шоков в день. Мы обнаружили обратную зависимость между количеством обнаруженных шоков на мезоуровне и средним значением количества сделок/заявок [37, рис. 1]. Чем больше сделок/заявок в среднем в день, т. е. чем более ликвидна акция, тем меньше шоков на мезоуровне она имеет. На микроуровне было идентифицировано 369 событий, в среднем 3,3 события в месяц по каждой акции. Частота событий варьируется от 0 до 12,8 событий в месяц по каждой акции. Изучая причины данных событий, мы обнаружили, что на микроуровне все события вызваны временным кризисом ликвидности — моментом торгов, когда поступает одна крупная рыночная заявка и исполняется большим количеством сделок с мелкими заявками противоположной направленности, ведущим к резкому изменению цены.

Одним из важнейших вопросов, исследованных в работе [19], является изучение поведения HFT (англ. High Frequency Trading) участников в моменты рыночных шоков. Для этой цели были выделены движения рынка, которые превышают 8 стандартных отклонений и 50 базисных пунктов в минутных интервалах. Общее количество рассматриваемых шоков превысило 1000. Для анализа отдельно были рассмотрены шоки, сопровождаемые движением цены вверх и движением вниз. Типичные профили шоков представлены на рис. 2.

Для каждого шока был построен агрегированный профиль торгового объема и обнаружено, что во время шока объем торгов на рынке увеличивается в среднем в 10 раз. Анализ показывает, что в среднем за 5 минут до шока возникает скачок в торговом дисбалансе (рис. 3).

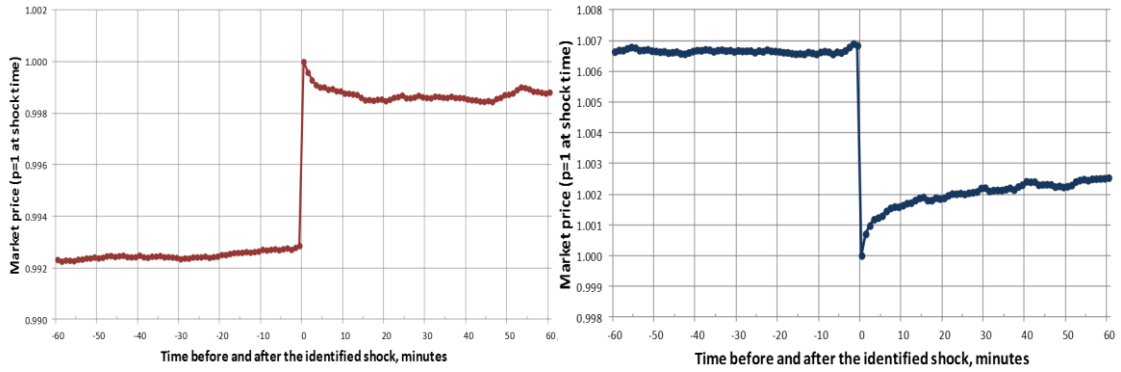


Рис. 2. Типичный профиль ценового шока (на этом графике и далее: сверху изображены показатели для шока вверх, снизу – для шока вниз)

В данном случае торговый дисбаланс измеряется на основе соотношения рыночных заявок на покупку и на продажу:

$$I_t = \frac{V_b}{V_s + V_b}, \quad I_t - \text{торговый дисбаланс в момент времени } t, \quad V_b - \text{общий объем рыночных за-}$$

явок на покупку,  $V_s$  – общий объем рыночных за-  
явок на продажу.

явок на покупку,  $V_s$  – общий объем рыночных за-  
явок на продажу.

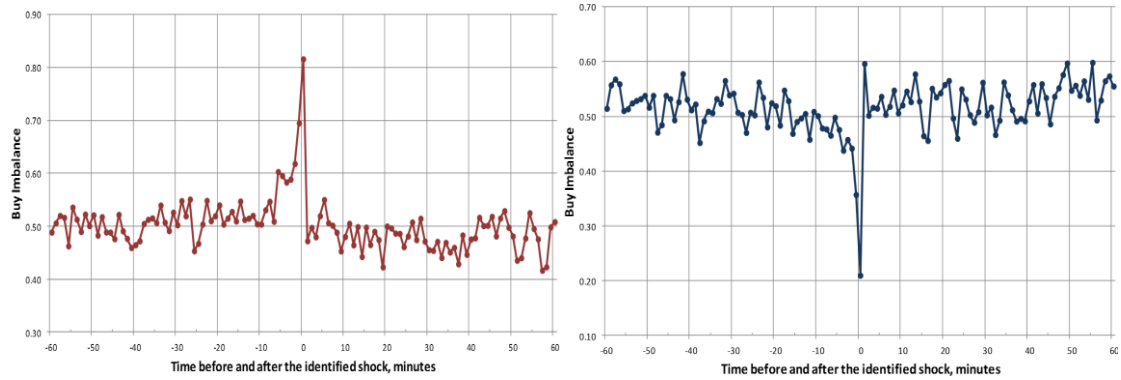


Рис. 3. Агрегированный профиль торгового дисбаланса

Для анализа поведения HFT участников в моменты шоков была рассмотрена метрика, характеризующая агрессивность заявок по исполненным сделкам с участием HFT. Было обнаружено, что во

время шоков высокочастотные участники ведут себя более агрессивно и являются инициаторами сделок на рынке.

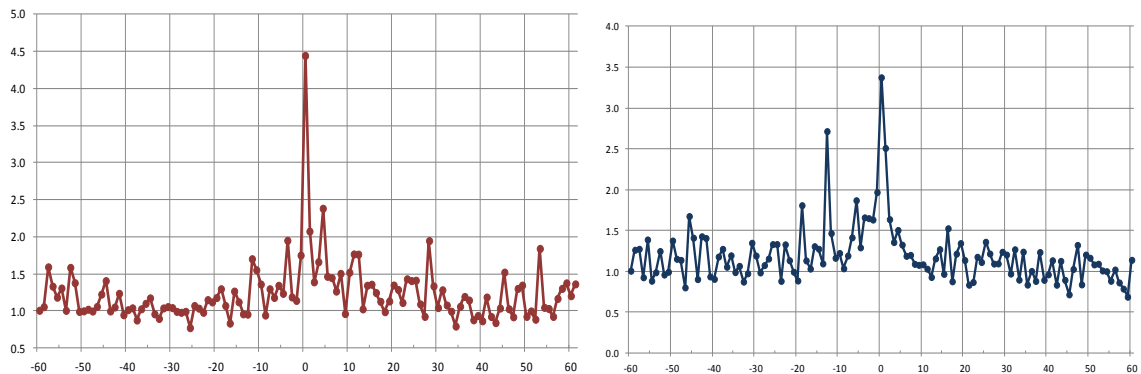


Рис. 4. Агрегированный профиль агрессивности заявок HFT

На большинстве рынков HFT присутствуют как на лучшей цене на покупку, так и на лучшей цене на продажу. При этом можно наблюдать, что со стороны, в которую идет направление шока,

HFT участники снимают свои заявки и выставляют дополнительные заявки на противоположной стороне (см. рис. 5).

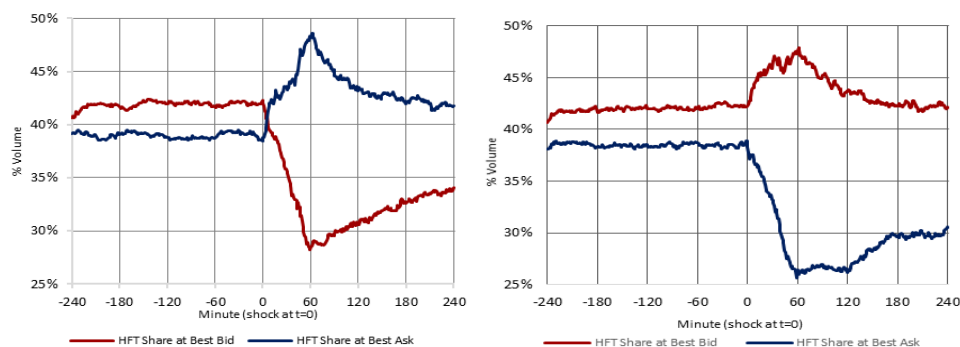


Рис. 5. Агрегированный профиль доли присутствия HFT заявок на лучших ценах

Таким образом, во время шоков HFT начинают вести себя более агрессивно и снижают предоставляемую ликвидность на стороне шока.

### 3.3. Построение типологии участников финансового рынка

Одним из наиболее значимых изменений структуры финансового рынка за последние несколько лет является развитие высокочастотной торговли (HFT). Согласно экспертным оценкам высокочастотная торговля отвечает за большую часть транзакций финансовых рынков (например, более 77% транзакций на рынке Великобритании согласно «Tabb Group») и способна критически влиять на возникновение системных нестабильностей. В статье [30] были выделены основные черты, характеризующие алгоритмы высокочастотной торговли:

1) Сложные высокоскоростные программы. Для повышения скорости принятия решений высокочастотные трейдеры используют сложное дорогостоящее оборудование, которое позволяет отслеживать и анализировать значительные массивы информации и принимать инвестиционные решения на основе выявленных закономерностей в режиме реального времени. Высокая сложность алгоритмов и требуемое быстрое действие практически исключает участие человека из процесса принятия решений.

2) Минимизация времени задержки (латентности). Существует прямая зависимость эффективности торговых алгоритмов от времени передачи поручений от алгоритма до ядра биржи.

3) Генерация значительного объема сообщений в течение дня. Высокочастотная торговля, как правило, характеризуется высоким количеством сообщений (выставлений, изменений, снятий заявок и совершения сделок), высоким торговым оборотом в течение торгового дня, высоким отношением количества выставленных заявок к числу исполненных сделок, относительно коротким средним временем жизни заявки.

4) Близкая к нулевой позиция на конец торгового дня. Горизонт удержания позиций, с которым работают высокочастотные трейдеры, обычно составляет от миллисекунд до часов.

5) Частные фирмы, торгующие на собственные средства.

Появление подобных алгоритмов способно влиять на фундаментальные процессы, происходящие на уровне микроструктуры рынка, и одной из

важнейших задач является идентификация таких высокочастотных участников на рынке. В работах [15; 16; 19] предложены различные способы выделения высокочастотных участников рынков, основываясь на методах деления участников на высокочастотных (HFT), долгосрочных инвесторов (LLT) и мелких участников (SMT). В работе [19] анализ характеристик участников позволил выделить 10 наиболее показательных характеристик, которые способны объяснить более 70% вариаций характеристик рыночных участников. При этом анализ этих характеристик на одном из азиатских рынков позволяет выявить около 30 наиболее активных счетов с характеристиками, свойственными HFT. Данный класс счетов был ответственным за создание больше половины всего потока заявок, 75% всех сделок (67 % всего оборота на рынке) и 80% изменений всех цен.

Экология участников финансового рынка в значительной степени зависит от высокочастотных участников, которые влияют на качественные и количественные показатели рынка. Кроме того, в работе [44] было показано, что интенсивность выставления заявок HFT участниками значительно зависит от времени выставления заявок и в дневной период усиливаются обратные связи при выставлении заявок.

В работе [19] для оценки влияния HFT участников на рынок использовалась векторная авторегрессия (VAR) следующего вида:

$$HFT_{i,t} = a_i + \sum_{k=1}^n b_i MQ_{i,t-k} + \sum_{k=1}^n c_k HFT_{i,t-k} + \varepsilon_{i,t}$$

$$MQ_{i,t} = \alpha_i + \sum_{k=1}^n \beta_i MQ_{i,t-k} + \sum_{k=1}^n \gamma_k HFT_{i,t-k} + \varepsilon_{i,t},$$

где  $HFT_{i,t}$  – общий объем торгов HFT в момент времени  $t$ ,  $MQ_{i,t}$  – рыночные переменные,  $n$  – количество лагов ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ).

В роли переменных качества финансового рынка рассматривались следующие:

- относительный спред;
- глубина рынка;
- волатильность средней цены (mid-point);
- волатильность Роджера – Сатчела;
- XLM (Xetra Liquidity Measure).

В рамках проведения анализа были рассчитаны VAR(p) модели для каждого инструмента и каждого дня (более 500 моделей). Далее для каждого случая был проанализирован информационный

критерий Акаике (AIC). Мы обнаружили, что в большинстве случаев влияние HFT торговли на рыночные характеристики с лагом в 1 минуту не существенны, исключая волатильность, которая показывает положительную зависимость от объема торгов  $HFT(t-1)$ . Таким образом, можно говорить об увеличении краткосрочной рыночной волатильности на следующую минуту при увеличении объема торгов HFT. Ликвидность финансового рынка значимо не зависит от торгов HFT (более детально показатели ликвидности представлены в работе [41]). Что же касается метрики XLM, в большинстве случаев  $p$ -value лагового влияния HFT на дан-

ную метрику ниже 5%, но при этом коэффициент статистически значим в 17% случаев. Из этого можно сделать вывод, что высокочастотные участники рынка не воздействуют постоянно на ликвидность на рынке и при этом существуют моменты, когда с ростом объема торгов HFT ликвидность уменьшается.

Разработки по данному направлению были положены в основу инструментального решения задач анализа микроструктуры финансового рынка в программном комплексе «ПРОГНОЗ. Timeline» (рис. 6).

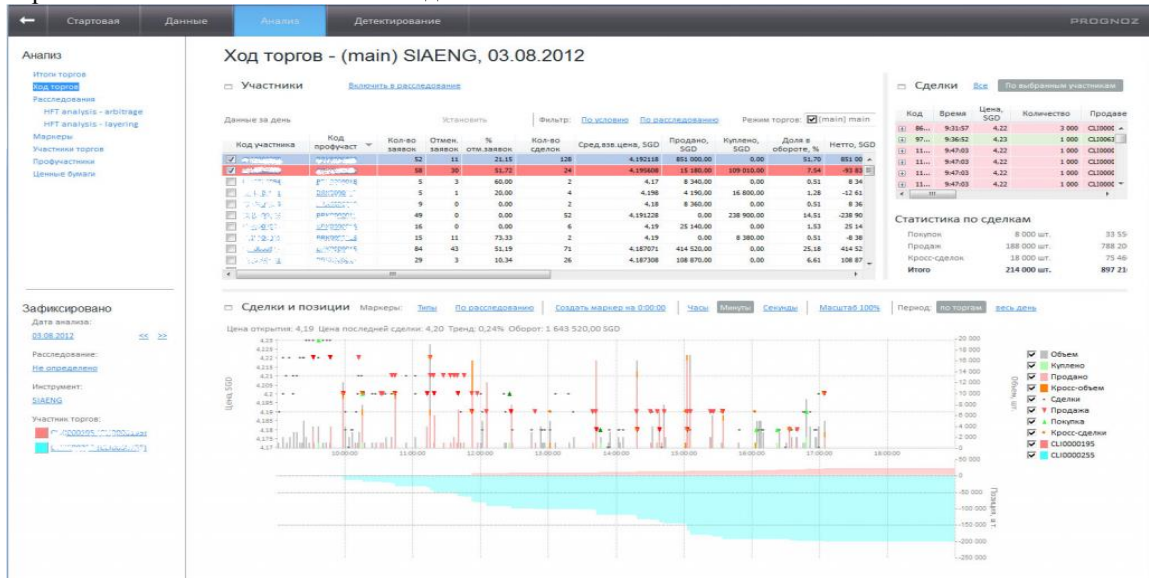


Рис. 6. Интерфейс «ПРОГНОЗ. Timeline»

Статистическая информация об участниках торгов, возможность создания моделей и эффективная визуализация позволяют решать широкий спектр задач анализа микроструктуры финансовых рынков.

### 3.4. Задачи анализа последствий регулирования финансовых рынков

Основным регулирующим параметром финансовых рынков является минимальное изменение цены и объем лота на финансовом инструменте. История регулирования и изменения минимального изменения цены началась в 1992 г., когда Американская фондовая биржа (AMEX) снизила размер тика с 1/8 доллара до 1/16 для акций, цены которых находились в диапазоне от 1 до 5 долларов США. Последствия снижения минимального размера цены активно обсуждаются в научном сообществе. В процессе этого обсуждения не сложилось единого мнения о пользе или вреде уменьшения размера тика.

Минимальный размер цены является абсолютной величиной и для сравнения различных инструментов, стран, анализа взаимосвязей между переменными, не подходит. Для таких целей удобнее использовать относительное минимальное изменение цены (или относительный размер тика), которое вычисляется следующим образом:

$$relative\ tick\ size = 10000 \cdot \frac{tick\ size}{avg.\ price}$$

где  $relative\ tick\ size$  – относительное минимальное изменение цены,

$tick\ size$  – абсолютное минимальное изменение цены,

$avg.\ price$  – среднее значение цены за расчетный период (данный показатель измеряется в базисных пунктах).

В работе [13] было проанализировано 60 финансовых инструментов с различным размером минимального изменения цены, начиная от инструментов с очень большим значением тика (72 базисных пункта) и заканчивая очень малыми значениями тика (0,18 базисных пунктов). С уменьшением размера тика микроструктура финансовых инструментов значительно изменяется. Наиболее заметно изменяется ценовая динамика инструментов. В работе [14] были выделены основные свойства потока заявок и проведен последующий анализ их связи с относительным значением тика:

- структура распределения объемов заявок;
- структура распределения цен заявок;
- интенсивность отмены заявок.

Одной из важнейших характеристик потока заявок на рынке является распределение размера заявок (рис. 7).

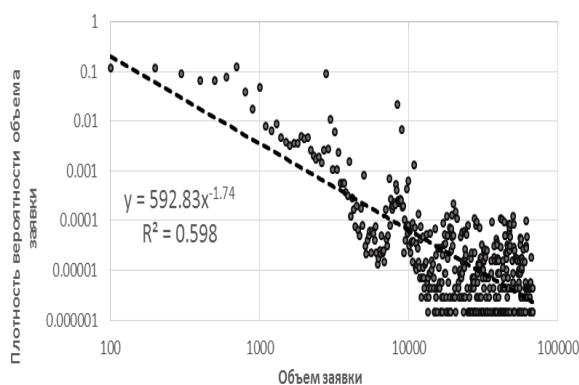


Рис. 7. Распределение объемов заявок для обыкновенных акций ОАО «Аэрофлот»

При построении распределений для различных инструментов из анализируемой выборки было обнаружено, что распределение объема заявок имеет степенную форму (см. рис. 8). Таким образом, в случае большого значения тика на ры-

нок приходят более крупные заявки. В случае малого размера тика крупные заявки дробятся на более мелкие и таким образом в среднем размер заявки становятся меньше.

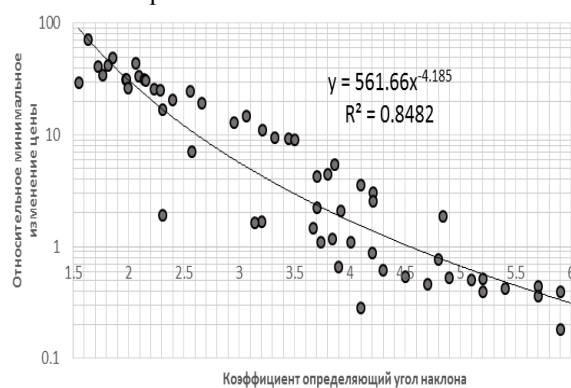


Рис. 8. Диаграмма рассеяния коэффициента наклона степенного распределения от размера относительного тика

Цены заявок, приходящих на рынок, зависят от текущей цены финансового инструмента. Для сравнения распределения цен заявок необходимо построить величину, не зависящую от конкретной цены актива. *Расстояние до цены* (англ. *price distance*) является такой характеристикой. Обозначим данную характеристику следующим образом:

$price\ distance = (p - p_b) / ticketsize$  для заявок на покупку и  $price\ distance = (p_a - p) / ticketsize$  для

заявок на продажу, где  $p$  – цена заявки а,  $p_a, p_b$  – лучшая цена на продажу и лучшая цена на покупку соответственно.

Характеристика расстояния до лучшей цены на рынке измеряется в количестве тиков. По результатам построения распределения данной величины, в работе [40] обнаружено, что данное распределение является смешанным и не описывается каким-либо известным распределением из математической статистики (см. рис. 9).

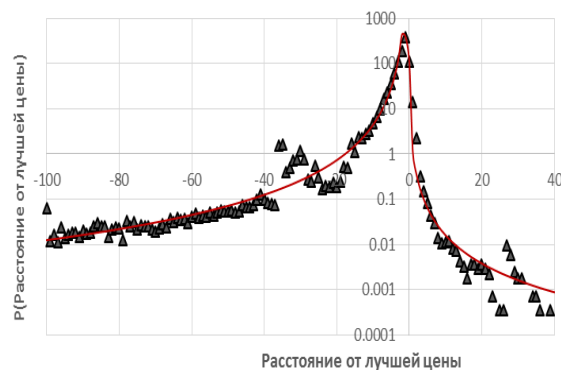


Рис. 9. Распределение цен заявок для обыкновенных акций ОАО «Аэрофлот»

Для данного распределения была рассчитана доля приходящих заявок на лучшую цену, вглубь книги заявок и на противоположную сторону книги заявок (таким образом, разделили распре-

деление на 3 части). По результатам расчета этих долей для всех инструментов в работе [12] были обнаружены степенные зависимости (см. рис. 10).



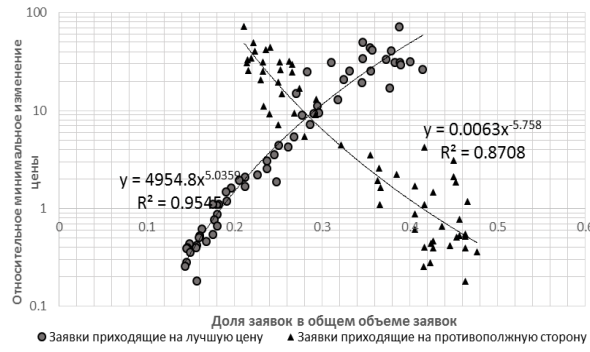


Рис. 10. Диаграмма рассеяния доли приходящих заявок от размера относительного тика

Для заявок, приходящих на лучшую цену на рынке, коэффициент наклона положителен. Данный факт свидетельствует о том, что с ростом размера тика растет и доля заявок, приходящих на уровень лучшей цены на рынке. Для заявок, попадающих на противоположную сторону книги заявок, угол наклона отрицательный. Таким образом, с увеличением размера тика, уменьшается число сделок.

В статье [12] приводится схема условного процесса отмены заявок. В данном процессе вероятность отмены зависит в большей степени от текущих рыночных условий по отношению к отменяемой заявке. В общем виде формула условной вероятности отмены заявок выглядит следующим образом:

$$P(C_i | y_i, n_{imb}, n_{tot}, \dots) = A(1 - \exp^{-K_1 y_i})(1 - \exp^{-D n_{tot}})(K_2 \cdot n_{imb} + b),$$

где  $P(C_i | y_i, n_{imb}, n_{tot}, \dots)$  – условная вероятность отмены заявки;

$y_i$  – относительная позиция заявки в книге заявок;

$n_{imb}$  – коэффициент дисбаланса в книге заявок;

$n_{tot}$  – общее число заявок в книге заявок;

$A$  – параметр, характеризующий максимальную вероятность отмены заявки;

$K_1$  – параметр чувствительности вероятности отмены к относительной позиции заявки в книге заявок;

$D$  – параметр чувствительности вероятности отмены к общему числу заявок;

$K_2$  – параметр чувствительности вероятности отмены к дисбалансу в книге заявок;

$b$  – параметр поправки коэффициента дисбаланса.

При анализе зависимостей показателей от размера минимального изменения цены была обнаружена зависимость от коэффициента  $K_1$  (рис. 11). Коэффициент  $K_1$  отвечает за чувствительность цены заявки к текущему состоянию рынка. Таким образом, с уменьшением размера тика снижается чувствительность цены заявки к текущему положению цены на рынке.



Рис. 11. Диаграмма рассеяния зависимости коэффициента условной вероятности отмен от размера относительного тика

В работе [12] была сформулирована методика, позволяющая учитывать последствия изменений размера тика в свойствах потока заявок. Выявленные зависимости могут быть выражены следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} K_1 = 0,94 \cdot TS^{0,2619} \\ \alpha_{volume} = 4,512 \cdot TS^{-0,238} \\ Q_{same} = 0,185 \cdot TS^{0,198} \\ Q_{opposite} = 0,416 \cdot TS^{-0,178} \\ Q_{best} = 1 - 0,416 \cdot TS^{-0,178} - 0,185 \cdot TS^{0,198}, \end{cases}$$

где  $K_1$  – параметр чувствительности вероятности отмены заявки к относительной позиции заявки в книге заявок;



Высокочастотные участники рынка подразделены на 4 типа агентов – направленные поставщики ликвидности (межрыночные арбитражеры), направленные потребители ликвидности (алгоритмы исполняющие крупные заявки), поставщики ликвидности без выраженного направления в торговле (маркет-мейкеры), потребители ликвидности без выраженного направления в торговле (статистические арбитражеры). Каждый из агентов выставляет и снимает заявки на рынке.

Каждая выставляемая заявка имеет направление, объем и цену. Для симуляции направления заявок использованы методики, разработанные профессором Ф.Лилло, которые позволяют воссоздавать поток заявок с длинной памятью. Автором данного исследования было предложено моделировать объем заявок с использованием степенного распределения, которое бы позволяло воссоздавать ситуацию прихода на рынок крупных заявок, приводящих к существенным изменениям на микроструктурном уровне. Для моделирования цены заявки рассматривалось распределение расстояния заявки от лучших цен на рынке. В работе [40] впервые было предложено разделить данное распреде-

ление на три составные части для учета влияния размера тика на данное распределение (рис. 13).

Для каждого из агентов оцениваются параметры распределений заявок и оценивается временная зависимость числа входящих заявок. Каждый участник выставляет отмены своих заявок с заданной вероятностью. Вероятность является условной и зависит от текущего состояния рынка. Были выделены наиболее значимые параметры, которые способны влиять на процесс отмены заявок на финансовом рынке:

- относительная позиция заявки в книге заявок, показывающая на сколько далеко заявка отклонилась от текущих рыночных цен,  $y_i$ ;
- число заявок находящихся в книге заявок и показывающее суммарную величину спроса и предложения на рынке,  $n_{tot}$ ;
- дисбаланс спроса и предложения на рынке,  $n_{imb}$ ;
- относительный объем заявки показывающий степень превышения спроса или предложения на лучших ценах на рынке,  $v_{rel}$ .

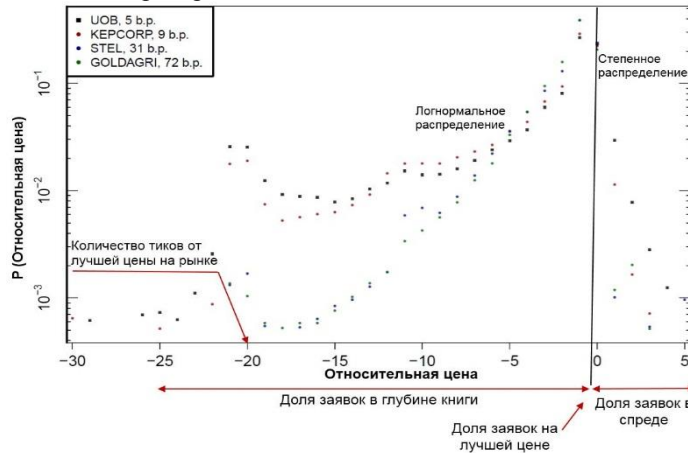


Рис. 13. Распределение расстояния цены заявки от лучших цен на рынке

Для каждой из данных характеристик была построена функция условной вероятности отмены и

оценена функциональная форма такой зависимости (рис. 14).

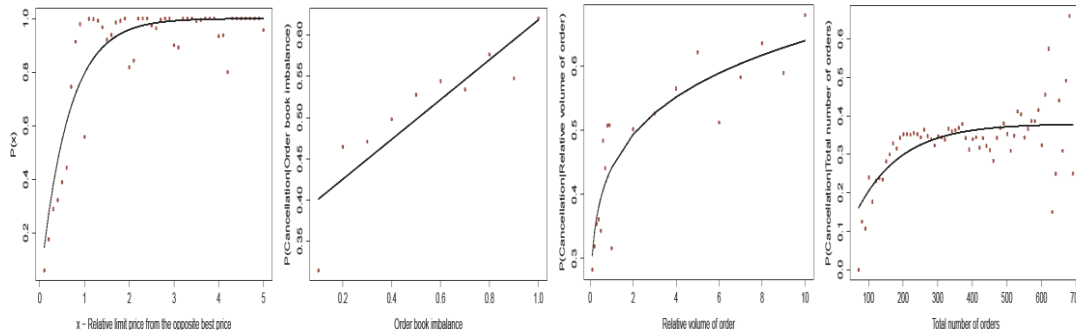


Рис. 14. Функция условной вероятности отмены заявки в зависимости от расстояния цены заявки до лучших цен на рынке (левый верхний график), относительного объема заявки (правый верхний график), общего количества заявок в книге заявок (левый нижний график), дисбаланса книги заявок (правый нижний график)

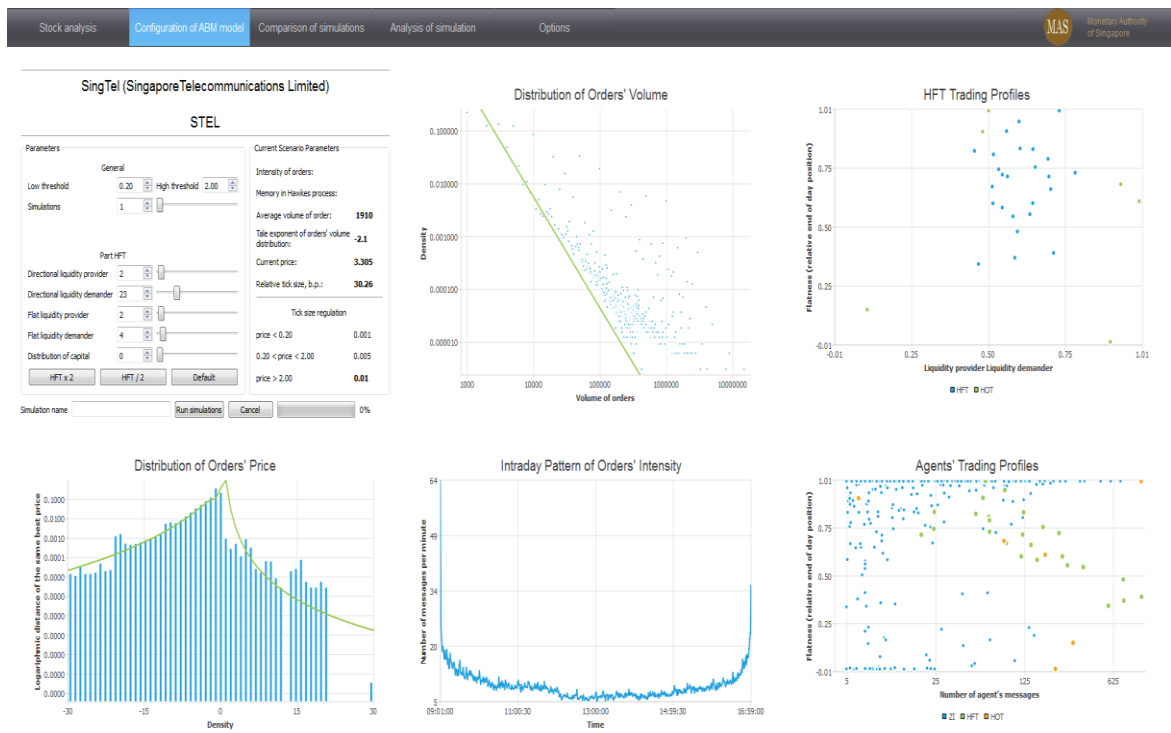


Рис. 15. Система имитационного моделирования, модуль настройки имитационной модели

Программная реализация ядра модели производилась на C++.

Реализация имитационной модели позволяет проводить сценарные изменения в области предпочтений и ограничений на определенных участниках рынка, а также анализировать изменения, происходящие на рынке в моменты изменения размера тика.

### Список литературы

1. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1997. № 6 (421). С. 3–16.
2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Перм. ун-т, 2001. 230 с.
3. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последствием. III // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 190. С. 1659–1668.
4. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последствием. IV // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 196–204.
5. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

7. *Аналитика-капитал. Т. XI: Генезис информатики и аналитики в корпоративном и административном управлении / под ред. Д.Л. Андрианова, С.Г. Тихомирова. М.: ВИНТИ РАН, 2005. 350 с.*

8. *Андрианов Д.Л., Максимов В.П.* Исследования динамических моделей экономики на кафедре «Информационные системы и математические методы в экономике» (теория, приложения, использование в учебном процессе) // Научные школы и направления исследований экономического факультета: итоги, вектор и перспективы развития: материалы Междунар. науч. конф. Пермь, Перм. ун-т, 17 апреля 2009 г. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009. С. 265–272.

9. *Андрианов Д.Л., Максимов В.П., Селянин А.О.* Задачи целевого управления и достижимости: теория и приложения // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2008. С. 5–22.

10. *Андрианов Д.Л., Поносов А.А., Поносов Д.А.* Целевое управление процессом развития текстильно-швейной отрасли Российской Федерации // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2011. № 4(11). С. 92–101.

11. *Анохин А.В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1037–1040.

12. *Арбузов В.О.* К вопросу использования имитационных моделей финансового рынка для прогнозирования последствий регулирования минимального изменения цены // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2014. Вып. 4. С.13–23.

13. Арбузов В.О. Современные тенденции в регулировании шага цены на российском рынке акций // ИНТЕЛЛЕКТ. ИННОВАЦИИ. ИНВЕСТИЦИИ. 2014. С.4–13.
14. Арбузов В.О. Адаптация модели Майка – Фармера для учета особенностей российского рынка акций // ИНТЕЛЛЕКТ. ИННОВАЦИИ. ИНВЕСТИЦИИ. 2014. С.4–17.
15. Арбузов В.О., Ивлиев С.В. К вопросу идентификации высокочастотных трейдеров на финансовом рынке // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2014. Вып. 2 (21). С. 24–30.
16. Арбузов В.О., Ивлиев С.В., Никулин М.Б. Кластеризация участников рынка на основе микро-структурных данных // Математические модели и системный анализ в экономике: сб. науч. тр. молодых ученых каф. информационных систем и математических методов в экономике / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011.
17. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
18. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
19. Ивлиев С.В., Арбузов В.О., Фролова М.С., Науменко В.В. Три вопроса к HFT. Как высокочастотные алгоритмы влияют на волатильность, ликвидность и рыночные шоки — взгляд сквозь призму азиатского рынка // Financial One. 2014. №4. С. 72–77.
20. Ларионов А.С., Симонов П.М. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последствием (ГФДСП). II // Вестник Российской академии естественных наук. Темат. номер «Дифференциальные уравнения». 2014. Т. 14, № 5. С. 38–45.
21. Максимов В.П. О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 4. С. 601–606.
22. Максимов В.П. Об одном подходе к задаче наведения системы в окрестность нормативной траектории // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2008. Вып. 8(24). С. 108–112.
23. Максимов В.П. Импульсная коррекция управления для динамических моделей с последствием // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2009. Вып. 1(1). С. 91–95.
24. Максимов В.П. Управление функционально-дифференциальной системой в условиях импульсных возмущений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 9. С. 70–74.
25. Максимов В.П., Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2011. Вып. 2(9). С. 13–23.
26. Максимов В.П., Чадов А.Л. Краевые задачи экономической динамики с приближенным выполнением краевых условий. Конструктивное исследование // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2012. Вып. 3. С. 13–18.
27. Максимов В.П., Чадов А.Л. Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 9. С. 72–76.
28. Максимов В.П., Чадов А.Л. Дискретное управление функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системой // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2013. Вып. 1(16). С. 6–11.
29. Максимов В.П., Поносов Д.А., Чадов А.Л. Некоторые задачи экономико-математического моделирования // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2010. Вып. 2(5). С. 45–50.
30. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. 456 с.
31. Поносов А.А. Задача управления для динамической модели эколого-экономического развития // Вестник Тамбовского университета. Сер.: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, № 5–2. С. 2643–2644.
32. Поносов А.А. Об одной задаче целевого управления для непрерывно-дискретной эколого-экономической модели развития Пермского края // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. 2015. Т. 6(78). URL: <http://www.uecs.ru> (дата обращения: 01.09.2015).
33. Поносов А.А., Поносов Д.А. О моделировании эколого-экономического развития региона // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. 2012. № 4. С. 142–146.
34. Поносов Д.А. О некоторых подходах к моделированию воздействия промышленного сектора на экологию региона // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. 2011. № 34. URL: <http://www.uecs.ru> (дата обращения: 01.09.2015).
35. Симонов П.М. Гибридная функционально-дифференциальная система // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. Вып. 3. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2010. С. 77–80.
36. Симонов П.М. Устойчивость дифференциально-разностной модели инвестиционного развития высокотехнологических производств // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Междунар. Четаевской конф. Т. 2. Секция 2. Устойчивость. Казань, 12–16 июня 2012 г. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 478–486.
37. Фролова М.С., Ивлиев С.В., Лилло Ф. Рыночные шоки в ценах российских акций // Проблемы анализа риска. 2014. Т.11, № 6.
38. Цалюк З.Б., Пуляев В.Ф. Задачи по функциональному анализу. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 152 с.
39. Целевое управление процессами социально-экономического развития субъектов Российской Федерации: моделирование, информационное, математическое и инструментальное обеспечение / Д.Л. Андрианов и др.; Перм. гос. ун-т. Пермь, 2008. 239 с.

40. Arbutov V. Revisiting of empirical zero intelligence models // *Financial Econometrics and Empirical Market Microstructure*. Heidelberg: Springer, 2015. P. 25–36.

41. Arbutov V., Frolova M. Market liquidity measurement and econometric modeling // *Market Risk and Financial Markets Modeling*. Springer, 2012. P. 25–36.

42. Azbelev N.V., Maksimov V. P., and Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. N.Y.: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.

43. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times. // *Functional Differential Equations*. 2012. Vol.19, №. 1–2. P. 49–62.

44. Efremova T., Ivliev S. Modeling of Russian Equity Market Microstructure (MICEX:HYDR Case) // *Market Risk and Financial Markets Modeling*. Springer, 2012. P. 37–46.

45. Frolova M. Market shocks: Review of Studies // *Financial Econometrics and Empirical Market Microstructure*. Heidelberg: Springer, 2015. P. 77–93.

46. Ivliev S., Frolova M., Mizgireva Yu. Practical aspects of creating an internal rating based model of non-financial companies // *Global Markets and Financial Engineering*. 2015. T. 2, № 1. P. 39–46.

47. Maksimov V.P. On the property of controllability with respect to a family of linear functionals // *Functional Differential Equations*. 2009. Vol. 16, № 3. P. 517–527.

48. Maksimov V.P. Control of Functional Differential System in Conditions of Impulse Disturbances // *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 2013. Vol. 57, №. 9. P. 58–61.

Получено: 01.10.2015

### References

1. Azbelev N.V., Simonov P.M. Ustoychivost' uravneniy s zapazdyvayushchim argumentum [Stability of equations with delaying argument]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics]. 1997 no. 6 (421), pp. 3–16.

2. Azbelev N.V., Simonov P.M. Ustoychivost' resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi [Stability of solutions of equations with ordinary derivatives]. Perm', Perm. un-t Publ., 2001. 230 p.

3. Azbelev N.V., Berezanskiy L.M., Simonov P.M., Chistyakov A.V. Ustoychivost' lineynykh sistem s posledeystviyem [Stability of linear systems with aftereffect]. III. *Differents. Uravneniya* [Differential equations]. 1991 Vol. 27, no. 190, pp. 1659–1668.

4. Azbelev N.V., Berezanskiy L.M., Simonov P.M., Chistyakov A.V. Ustoychivost' lineynykh sistem s posledeystviyem [Stability of linear systems with

aftereffect]. IV. *Differents. Uravneniya* [Differential equations]. 1993. Vol. 29. no. 2, pp. 196–204.

5. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedeniye v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 280 p.

6. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Elements of the contemporary theory of functional differential equations]. Moscow, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2002. 384 p.

7. *Analitika-kapital. T. XI: Genezis informatiki i analitiki v korporativnom i administrativnom upravlenii* [Genesis of informatics and analytics in corporation and administration management]. Pod red. D.L. Andrianov, S.G. Tikhomirov. Moscow, VINITI RAN Publ., 2005. 350 p.

8. Andrianov D.L., Maksimov V.P. Issledovaniya dinamicheskikh modeley ekonomiki na kafedre «Informatsionnyye sistemy i matematicheskiye metody v ekonomike» (teoriya, prilozheniya, ispol'zovaniye v uchebnom protsesse) [Investigations of economic dynamics models at the department of information systems and mathematical methods in economics. *Nauchnyye shkoly i napravleniya issledovaniy ekonomicheskogo fakul'teta: itogi, vektor i perspektivy razvitiya: materialy Mezhdunar. nauch. konf. (Perm', Perm. un-t, 17 aprelya 2009 g.)*. Perm', Perm. gos. un-t Publ., 2009, pp. 265–272.

9. Andrianov D.L., Maksimov V.P., Selyanin A.O. Zadachi tselevogo upravleniya i dostizhimosti: teoriya i prilozheniya [Problems of objective control and attainability: theory and applications]. *Informatsionnyye sistemy i matematicheskiye metody v ekonomike* [Information systems and mathematical methods in economics]: sb. nauchn. tr. Perm', Perm. gos. un-t Publ., 2008, pp. 5–22.

10. Andrianov D.L., Ponosov A.A., Ponosov D.A. Tselevoye upravleniye protsessom razvitiya tekstil'no-shveyonoy otrasli Rossiyskoy Federatsii [Target management of textile industry development in Russian Federation]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika* [Perm University Herald. Economy]. 2011. no. 4 (11), pp. 92–101.

11. Anokhin A.V. O lineynykh impul'snykh sistemakh dlya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [Linear impulse systems for functional differential equations]. *DAN SSSR* [Russian Acad. Sci. Dokl. Math]. 1986. Vol. 286. no. 5, pp. 1037–1040.

12. Arbutov V.O. K voprosu ispol'zovaniya imitatsionnykh modeley finansovogo rynka dlya prognozirovaniya posledstviy regulirovaniya minimal'nogo izmeneniya tseny [On modeling tick size regulation consequences using imitation models of financial market]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika* [Perm University Herald. Economy]. 2014. no. 4, pp. 13–23

13. Arbutov V.O. Sovremennyye tendentsii v regulirovanii shaga tseny na rossiyskom rynke aktsiy [Contemporary trends in regulating tick size on the

Russian market] *Intellekt. Innovatsii. Investitsii* [Intellect. Innovations. Investments]. 2014, pp. 4–13.

14. Arbuzov V.O. Adaptatsiya modeli Mayka - Farmera dlya ucheta osobennostey rossiyskogo rynka aktsiy [The Mike-Farmer model adaptation as applied to the Russian market]. *Intellekt. Innovatsii. Investitsii* [Intellect. Innovations. Investments]. 2014, pp. 4–17.

15. Arbuzov V.O., Ivliev S.V. K voprosu identifikatsii vysokochastotnykh treyderov na finansovom rynke [On the identification of HFT traders on the financial market]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika* [Perm University Herald. Economy]. 2014. no. 2, pp. 24–30.

16. Arbuzov V.O., Ivliev S.V., Nikulin M.B. Klasterizatsiya uchastnikov rynka na osnove mikrostrukturnykh dannykh [Clustering of market participants on the base of microstructure data] *Matematicheskiye modeli i sistemnyy analiz v ekonomike* [Mathematical models and system analysis in economics]: sb. nauch. tr. molodykh uchenykh kaf. informatsionnykh sistem i matematicheskikh metodov v ekonomike. Perm', Perm. gos. un-t Publ., 2011.

17. Barbashin E. A. *Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti* [Introduction in stability theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 224 p.

18. Yeremin I.I. *Protivorechivyye modeli optimal'nogo planirovaniya* [Inconsistent models of optimal planning]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 160 p.

19. Ivliev S.V., Arbuzov V.O., Frolova M.S., Naumenko V.V. Tri voprosa k HFT. Kak vysokochastotnyye algoritmy vliyayut na volatil'nost', likvidnost' i rynochnyye shoki - vzglyad skvoz' prizmu aziatskogo rynka [Three questions to HFT. What is HFT algorithms impact onto market shocks? ]. *Financial One*. 2014. no 4, pp. 72–77.

20. Larionov A.S., Simonov P.M. Ustoychivost' gibridnykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem s posledeystviyem (GF DSP). [Stability of hybrid functional differential systems]. II. *Vestnik Rossiyskoy akademii yestestvennykh nauk*. Temat. nomer «Differentsial'nyye uravneniya» [Russian Acad. Natur. Sci. Special issue. Differential equations]. 2014. Vol. 14. no. 5, pp. 38–45.

21. Maksimov V.P. O formule Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya [The Cauchy formula for a functional differential equation]. *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential equations]. 1977. Vol. 13. no. 4, pp. 601–606.

22. Maksimov V.P. Ob odnom podkhode k zadache navedeniya sistemy v okrestnost' normativnoy trayektorii [An approach to the problem of directing a system to a neighborhood of the normative trajectory]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika*. [Perm University Herald. Economy]. 2008. no. 8 (24), pp. 108–112.

23. Maksimov V.P. Impul'snaya korrektsiya upravleniya dlya dinamicheskikh modeley s posledeystviyem [Impulse correction of the control for dynamic models with aftereffect]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika* [Perm University Herald. Economy]. 2009. no. 1 (1), pp. 91–95.

24. Maksimov V.P. Upravleniye funktsional'no-differentsial'noy sistemoy v usloviyakh impul'snykh vozmushcheniy [Control of functional differential system in conditions of impulse disturbances]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [Russian Mathematics]. 2013 no. 9, pp. 70–74.

25. Maksimov V.P., Chadov A.L. Gibridnyye modeli v zadachakh ekonomicheskoy dinamiki [Hybrid models in economic dynamics problems]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika* [Perm University Herald. Economy]. 2011 no. 2 (9), pp. 13–23.

26. Maksimov V.P., Chadov A.L. Krayevyye zadachi ekonomicheskoy dinamiki s priblizhennym vypolneniyem krayevykh usloviy. Konstruktivnoye issledovaniye [Boundary value problems with approximate fulfillment of boundary conditions. Constructive study]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika* [Perm University Herald. Economy]. 2012. no. 3, pp. 13–18.

27. Maksimov V.P., Chadov A.L. Ob odnom klasse upravleniy dlya funktsional'no-differentsial'noy nepreryvno-diskretnoy sistemy A class of controls for a functional differential continuous discrete system]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [Russian Mathematics]. 2012. no. 9, pp. 72–76.

28. Maksimov V.P., Chadov A.L. Diskretnoye upravleniye funktsional'no-differentsial'noy nepreryvno-diskretnoy sistemoy [Discrete control of a functional differential continuous discrete system]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika* [Perm University Herald. Economy]. 2013. no. 1 (16), pp. 6–11.

25. Maksimov V.P., Ponosov D.A., Chadov A.L. Nekotoryye zadachi ekonomiko-matematicheskogo modelirovaniya *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika* [Perm University Herald. Economy]. 2010. no. 2 (5), pp. 45–50.

30. Massera J. L., Shaeffer J. J. *Linear differential equations and functional spaces*. Academic Press: NY, 1966. 425 p.

31. Ponosov A.A. Zadacha upravleniya dlya dinamicheskoy modeli ekologo-ekonomicheskogo razvitiya [A control problem for a dynamic model of ecology economic development]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Yestestvennyye i tekhnicheskkiye nauki* [Tambov University Reports. Natural and Technical Sciences]. 2013. Vol. 18. no. 5-2, pp. 2643–2644.

32. Ponosov A.A. Ob odnoy zadache tselovogo upravleniya dlya nepreryvno-diskretnoy ekologo-ekonomicheskoy modeli razvitiya Permskogo kraya [A goal control problem for a continuous discrete model of ecology economic development of Perm region]. *Upravleniye ekonomicheskimi sistemami: elektronnyy nauchnyy zhurnal* [Control of economic systems]. 2015. Vol. 6 (78). Available at: <http://www.uecs.ru> (accessed 01.09.2015).

33. Ponosov A.A., Ponosov D.A. O modelirovanii ekologo-ekonomicheskogo razvitiya regiona [Modeling of a regional ecology economic development]. *Ekonomika, statistika i informatika*

[Economics, statistics and informatics]. Vestnik UMO. 2012. no. 4, pp. 142–146.

34. Ponosov D.A. O nekotorykh podkhodakh k modelirovaniyu vozdeystviya promyshlennogo sektora na ekologiyu regiona [Some approaches to modeling impact of industry onto regional ecology]. *Upravleniye ekonomicheskimi sistemami* [Control of economic systems]: elektronnyy nauchnyy zhurnal. 2011. no. 34. Available at: <http://www.uecs.ru> (accessed 01.09.2015).

35. Simonov P.M. Gibrinaya funktsional'no-differentsial'naya sistema [A hybrid functional differential system]. *Informatsionnye sistemy i matematicheskiye metody v ekonomike* [Information systems and mathematical methods in economics]: sb. nauch. tr. Perm', Permskiy gos. un-t Publ. 2010. no. 3, pp. 77–80.

36. Simonov P.M. Ustoychivost' differentsial'no-raznostnoy modeli investitsionnogo razvitiya vysokotekhnologicheskikh proizvodstv [Stability of a differential-difference model of high-tech production]. *Analiticheskaya mekhanika, ustoychivost' i upravleniye* [Analytical mechanics, stability and control]. Trudy X Mezhdunarodnoy Chetayevskoy konferentsii. T. 2. Sektsiya 2. Ustoychivost'. Kazan', 12 - 16 iyunya 2012 g. Kazan': Izd-vo Kazan. gos. tekhn. un-ta, 2012, pp. 478–486.

37. Frolova M.S., Ivliev S.V., Lillo F. Rynochnyye shoki v tsenakh rossiyskikh aktsiy [Market shocks in Russian share prices]. *Problemy analiza riska* [Risks analysis problems]. 2014. Vol. 6. no. 11.

38. Tsalyuk Z.B., Pulyayev V.F. *Zadachi po funktsional'nomu analizu* [Functional Analysis Problems]. Moscow, Izhevsk, NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika» Publ., 2010. 152 p.

39. *Tselevoye upravleniye protsessami sotsial'no-ekonomicheskogo razvitiya sub"yektov Rossiyskoy Federatsii: modelirovaniye, informatsionnoye, matematicheskoye i instrumental'noye obespecheniye* [Goal control of social economic development of federal subjects of the Russian Federation: modeling and

software]. D.L. Andrianov et al. Perm', Perm. gos. un-t Publ., 2008. 239 p.

40. Arbuzov V. Revisiting of empirical zero intelligence models. *Financial Econometrics and Empirical Market Microstructure*. Heidelberg: Springer. 2015. pp. 25–36.

41. Arbuzov V., Frolova M. Market liquidity measurement and econometric modeling. *Market Risk and Financial Markets Modeling*. Springer, 2012, pp. 25–36.

42. Azbelev N.V., Maksimov V.P., and Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications*. N.Y.: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.

43. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times. *Functional Differential Equations*. 2012. Vol. 19, no. 1–2, pp. 49–62.

44. Efremova T., Ivliev S. Modeling of Russian Equity Market Microstructure (MICEX:HYDR Case). *Market Risk and Financial Markets Modeling*. Springer, 2012, pp. 37–46.

45. Frolova M. Market shocks: Review of Studies. *Financial Econometrics and Empirical Market Microstructure*. Heidelberg: Springer, 2015, pp. 77–93.

46. Ivliev S., Frolova M., Mizgireva Yu. Practical aspects of creating an internal rating based model of non-financial companies. *Global Markets and Financial Engineering*. 2015. Vol. 2. no. 1, pp. 39–46.

47. Maksimov V.P. On the property of controllability with respect to a family of linear functionals. *Functional Differential Equations*. 2009. Vol. 16. no. 3, pp. 517–527.

48. Maksimov V.P. Control of a functional differential system in conditions of impulse disturbances. *Russian Mathematics*. 2013. Vol. 57. no. 9, pp. 58–61.

*The date of the manuscript receipt:*  
01.10.2015

## ECONOMIC DYNAMICS MODELS: THEORY, APPLICATIONS, COMPUTER AIDED IMPLEMENTATION

Dmitriy L. Andrianov, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics

E-mail: [adl@prognoz.ru](mailto:adl@prognoz.ru)

Vyacheslav O. Arbuzov, Postgraduate Student

E-mail: [arbuzov@prognoz.ru](mailto:arbuzov@prognoz.ru)

Sergey V. Ivliev, Candidate of Economic Sciences, Associate Professor

E-mail: [ivliev@gmail.com](mailto:ivliev@gmail.com)

Vladimir P. Maksimov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor

E-mail: [maksimov@econ.psu.ru](mailto:maksimov@econ.psu.ru)

Pyotr M. Simonov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor

E-mail: [simpm@mail.ru](mailto:simpm@mail.ru)

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia

In the paper, a survey of theoretical and applied results obtained in the framework of the scientific school at the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University, is given. It covers the period from 2008 to 2015. The theoretical results are based on the principal statements of the contemporary



theory of functional differential equations worked out by the participants of the Perm Seminar under the leadership of Prof. N.V. Azbelev (1922–2006). The focus of attention is on problems of forecasting, boundary value problems (problems of attainability), control problems, and problems of stability for the dynamic models that allow one to take into account aftereffects and effects of impulse disturbances (shocks). For the mentioned problems, sufficient conditions of the solvability are obtained, methods of constructing program controls and the corresponding trajectories are proposed. Algorithms of the computer-assisted study of the control problems are worked out, including algorithms of correction for certain ill-posed problems. The applied results use the achievements of the theory and are implemented in the form of software tools for the study and solution of the real economy problems such as forecasting, control and stability analysis as applied to models of socio-economic development of the regions of the Russian Federation and the Russian Economy as a whole.

*Keywords: economic dynamic models, forecasting problems, boundary value problems, control problems, information analytical systems, decision making systems, business intelligence systems.*

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

*Андрианов Д.Л., Арбузов В.О., Ивлиев С.В., Максимов В.П., Симонов П.М. Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2015. № 4(27). С. 8–32.*