ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014 ЭКОНОМИКА Вып. 2(21)

РАЗДЕЛ I. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.929 + 330.4

ББК 22.162

ПОЗИЦИОННОЕ ПАРИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В.П. Максимов, д. физ.-мат. наук, проф. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Электронный адрес: maksimov@econ.psu.ru
Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Динамические модели, рассматриваемые в этой работе, охватывают широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом эффектов последействия (запаздывания). Для таких моделей рассматриваются задачи управления, в которых цель управления задается конечной совокупностью линейных функционалов, число которых, вообще говоря, не связано с размерностью системы. Система подвержена воздействию импульсных возмущений, приводящих к скачкам траектории, моменты времени и величины которых заранее неизвестны. Предлагается конструкция регулярного (не импульсного) управления, которое решает задачу управления с заданной системой целевых функционалов, несмотря на наличие импульсных воздействий. Считается, что информация о состоявшихся скачках становится известной к началу действия корректирующих управлений, которые являются позиционными по скачкам реализуемой траектории. Для последовательной компенсации возникающих скачков вводится обратная связь (дополнительные слагаемые в уравнениях движения). Предлагаемый подход к парированию импульсных возмущений и конструкции управления существенно опираются на фундаментальные результаты современной теории функционально-дифференциальных уравнений (теоремы о представлении решений линейных систем с последействием, свойства матрицы Коши, условия разрешимости задач управления с целевыми функционалами общего вида и широкими классами управляющих воздействий). Приводится пример, иллюстрирующий целесообразность введения процедуры парирования импульсных возмущений с использованием обратной связи. Решение задачи управления без использования такой процедуры требует бóльших ресурсов управления.

Ключевые слова: модели экономической динамики, функционально-дифференциальные уравнения, импульсные системы, задачи управления.

Введение

Динамические модели, рассматриваемые в этой работе, охватывают широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом импульсных воздействий (как элементов управления), импульсных возмущений (как помех) и эффектов последействия (запаздывания). Задачи управления для таких моделей мы рассматриваем в рамках подхода, подробно изложенного в работе [13] и использующего банахово пространство кусочно абсолютно непрерывных функций, введенное А.В. Анохиным в [3]. Импульсные воздействия на исследуемую систему проявляются в скачкообразном изменении состояния системы и приводят к необходимости рассматривать разрывные решения уравнения с обыкновенной производной.

Подход к изучению дифференциальных уравнений с разрывными решениями связан с теорией так называемых обобщенных дифференциальных уравнений, предложенной J.Kurzweil [21]. К настоящему времени эта теория хорошо разработана (см., например, [24–26, 18]). Согласно принятому подходу, импульсные уравнения рассматриваются в классе функций ограниченной вариации. В этом случае под решением понимается функция ограниченной вариации, удовлетворяющая интегральному уравнению с интегралом Лебега

– Стильтьеса или Перрона – Стильтьеса. В работах [17, 20] понятие решения функционально-дифференциального уравнения с обобщенными воздействиями формализуется на основе замыкания гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Импульсные режимы в задачах оптимального управления, в том числе с приложениями к задачам экономики, исследуются в [4, 5].

Напомним, что функция ограниченной вариации представима в виде суммы абсолютно непрерывной функции, функции скачков и сингулярной компоненты – непрерывной функции с производной, равной нулю почти всюду. Решения уравнений, рассматриваемых ниже, не содержат сингулярной компоненты и могут претерпевать разрывы только в конечном числе точек на заданном конечном промежутке времени. Эти уравнения рассматриваются в пространстве $DS^n(m)$ – конечномерном расширении традиционного пространства абсолютно непрерывных функций (см. ниже). Такой подход к уравнениям со скачками был предложен в [3]. Он не использует сложную теорию обобщенных функций и находит много приложений в тех случаях, когда вопрос о сингулярной компоненте не возникает. Условия разрешимости задачи управления для линейных функционально-дифференциальных систем с траекториями из пространства $DS^n(m)$, а также конструктивные методы исследования и алгоритмы построения программных управлений изложены в [10,13-15,22,23]. При этом возможные скачки траекторий рассматривались как компоненты управляющих воздействий в сочетании с традиционным управлением из пространства L_2, а целью управления являлось достижение предписанных значений каждым из заданных линейных целевых функционалов, число которых, вообще говоря, не связано с размерностью системы управления. Последнее обстоятельство и общий вид целевых функционалов используются в [9] для успокоения траектории системы с последействием в окрестности заданной целевой траектории в течение заданного промежутка времени. Возможные эффекты сочетания импульсных управлений и управлений из L_2 обсуждаются в [10], где, в частности, показано, что использование импульсной составляющей может приводить к уменьшению общих затрат на реализацию управляющих воздействий.

Здесь мы рассматриваем задачу управления в постановке, при которой возможные скачки траекторий рассматриваются как результат внешних импульсных воздействий, неизвестных заранее ни по моменту возникновения, ни по величине скачков. Предлагается конструкция регулярного (не импульсного) управления, которое решает задачу управления с заданной системой целевых функционалов, несмотря на наличие импульсных воздействий. Считается, что информация о состоявшихся скачках становится известной к началу действия корректирующих управлений, которые являются позиционными по скачкам реализуемой траектории. Для последовательной компенсации возникающих скачков вводится обратная связь (дополнительные слагаемые в уравнениях движения). Основной математический результат – теорема об условиях разрешимости рассматриваемой задачи управления – опубликован без доказательства в [11].

Отметим, что задача описания управлений, компенсирующих аддитивные помехи, суммируемые с квадратом, для линейных систем с последействием по состоянию и отсутствием запаздывания при реализации управлений исследована в [7].

1. Предварительные сведения

Здесь мы следуем обозначениям и основным положениям теории функционально-дифференциальных уравнений в части линейных систем с импульсными воздействиями [1, с.123–130] (см. также [2, с.124–134]; [19, с.100–108]). Обозначим через $L^n = L^n[0,T]$ пространство суммируемых по Лебегу на конечном промежутке $[0,T]$ функций $z:[0,T]\to R^n$ с нормой $\|z\|_{L_n} = \int\limits_0^T |z(s)|_n\,ds$, где $|\cdot|_n$ – норма в R^n (далее, если размерность пространства очевидна, индекс у нормы будем опускать). Для описания траекторий, имеющих скачки первого рода в последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_m < T$ $(t_1 > 0)$, следуя [3], введем пространство $DS^n(m)$ кусочно абсолютно непрерывных функций $y:[0,T]\to R^n$, представимых в виде

$$y(t) = \int\limits_0^t z(s)ds + y(0) + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,T]}(t)\Delta y(t_k), \quad (1)$$

где $z \in L_n$, $\Delta y(t_k) \equiv y(t_k) - y(t_k - 0)$, $\chi_{[t_k,T]}(t)$ – характеристическая функция отрезка $[t_k, T]$. Элементы пространства $DS^n(m)$ – это функции, абсолютно непрерывные на каждом из промежутков $[0,t_1),[t_1,t_2),\ldots,[t_m,T]$ и непрерывные справа в точках $t_1,t_2,\ldots,t_m$. Норму в $DS^n(m)$ определим равенством

$$\|y\|_{DS^n(m)} = \|\dot y\|_{L^n} + |y(0)|_n + \sum_{k=1}^m |\Delta y(t_k)|_n,$$

$DS^n(m)$ – банахово пространство. Подчеркнем, что при рассмотрении задачи управления мы не фиксируем заранее моменты времени $t_1, t_2, ..., t_m$ и их число m. Конкретное пространство $DS^n(m)$ будет использоваться для коррекции программного управления начиная с момента времени T_0 $(t_m < T_0 < T)$, когда информация о реализовавшихся импульсных воздействиях станет доступной. Предлагаемые ниже конструкции используются в предположении, что на промежутке $[T_0, T]$ импульсные воздействия исключены. Обозначим через $AC^n[0,T]$ пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,T] \to R^n$ с нормой $\|x\|_{AC^n} = \|\dot{x}\|_{L^n} + |x(0)|_n$. Пространство $DS^n(m)$ является конечномерным расширением пространства $AC^n[0,T]$.

Для описания системы управления введем линейный оператор $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{L}y)(t) = \dot{y}(t) - \int_0^t K(t,s)\dot{y}(s)ds + A(t,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(t)A(t,t_k)\Delta y(t_k), \quad t \in [0,T]. \qquad (2)$$

Здесь элементы $k_{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}$ и таковы, что на этом множестве

$$|k_{ij}(t,s)| \le \kappa(t), \quad i,j = 1,...,n,$$

где функция κ суммируема на $[0,T]$, элементы $(n\times n)$-матрицы $A(t,s)$ определены на множестве $\{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}$ и для каждого $s \in [0,T)$ суммируемы на $[s,T]$.

Оператор $\mathcal{L}$: $DS^n(m) \to L^n$ ограничен. Функционально-дифференциальная система $\mathcal{L}y = f$ охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. При сделанных предположениях линейный оператор $Q: L^n \to L^n$, $(Qz)(t) = z(t) - \int_0^t K(t,s)z(s)ds$ имеет ограниченный обратный оператор $(Q^{-1}f)(t) = f(t) + \int_0^t R(t,s)f(s)ds$, где $R(t,s)$ – резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t,s)$. Матрица $C(t,s) = E + \int_s^t R(\tau,s)d\tau$, где E – единичная $(n\times n)$-матрица, называется матрицей Коши [8, 12]. Определим $(n\times n)$-матрицы Y и Y_k, $k = 1,...,m$ равенствами

$$Y(t) = E - \int_0^t C(t,s)A(s,0)ds,$$

$$Y_k(t) = \chi_{[t_k,T]}(t)(E - \int_{t_k}^t C(t,s)A(s,t_k)ds), \; k = 1,...,m.$$

Общее решение уравнения

$$(\mathcal{L}y)(t) = f(t), \; t \in [0,T]$$

имеет представление

$$y(t) = Y(t)y(0) + \sum_{k=1}^{m} Y_k(t)\Delta y(t_k) + \int_0^t C(t,s)f(s)ds. \qquad (3)$$

Действительно, решая однородное уравнение $(\mathcal{L}y)(t) = 0$, $t \in [0,T]$ относительно производной $\dot{y}$ с использованием обратного оператора Q^{-1}, получаем:

$$\dot{y}(t) = -\{A(t,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(t)A(t,t_k)\Delta y(t_k)\} - \int_0^t R(t,s)\{A(s,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(s)A(s,t_k)\Delta y(t_k)\}ds.$$

Далее, имея в виду представление (1), находим

$$y(t) = -\int_0^t \{A(\tau,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(\tau)A(\tau,t_k)\Delta y(t_k)\}d\tau - \int_0^t\int_0^\tau R(\tau,s)\{A(s,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(s)A(s,t_k)\Delta y(t_k)\}dsd\tau + A(t,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(t)A(t,t_k)\Delta y(t_k)$$

или после смены порядка интегрирования в повторном интеграле

$$y(t) = -\int_0^t \{A(\tau,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(\tau)A(\tau,t_k)\Delta y(t_k)\}d\tau - \int_0^t\int_s^t R(\tau,s)\{A(s,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(s)A(s,t_k)\Delta y(t_k)\}d\tau ds =$$

$$= -\int_0^t \{A(\tau,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(\tau)A(\tau,t_k)\Delta y(t_k)\}d\tau - \int_0^t\int_s^t R(\tau,s)d\tau\{A(s,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(s)A(s,t_k)\Delta y(t_k)\}ds + A(t,0)y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(t)A(t,t_k)\Delta y(t_k).$$

Теперь, приводя подобные, используя представление матрицы Коши и обозначения $Y(t)$, $Y_k(t)$, для общего решения однородного уравнения $(\mathcal{L}y)(t) = 0$ получаем представление

$$y(t) = Y(t)y(0) + \sum_{k=1}^{m} Y_k(t)\Delta y(t_k).$$

Отсюда с учетом того, что $\int_0^t C(t,s)f(s)ds$ является решением уравнения

$(\mathcal{L}y)(t) = f(t)$, окончательно получаем представление (3).

2. Задача управления

Система управления, подверженная импульсным возмущениям, описывается уравнением

$$(\mathcal{L}y)(t) = I_\delta(t,\Delta y) + (Bu)(t) + g(t),\ t \in [0,T]. \quad (4)$$

Здесь $I_\delta(t,\Delta y) = -\dfrac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{m}\chi_{[t_k,t_k+\delta]}(t)\,\Delta y(t_k)$, δ – положительный параметр, характеризующий реакцию системы на произошедший скачок траектории: на промежутке времени длиной δ система реагирует скачком производной (покомпонентно со знаком, противоположным знаку скачка траектории), слагаемое I_δ в целом означает наличие обратной связи в системе управления и является элементом позиционного управления; B – линейный оператор, определенный на пространстве PC^ν функций $u:[0,T]\to R^\nu$ (управлений) с кусочно постоянными компонентами, действующий в пространство L^n и обладающий свойством вольтерровости: для любого $\tau \in (0,T)$ $(Bu)(t)=0$ на $[0,\tau]$ для всех таких $u \in PC^\nu$, что $u(t)=0$ на $[0,\tau]$; $g \in L^n$. Начальное состояние системы (4) задано: $y(0)=\alpha$, цель управления задается с помощью линейного ограниченного вектор-функционала $\ell : DS^n(m) \to R^N$:

$$\ell y = \gamma \in R^N. \quad (5)$$

Требуется найти такое управление u, при котором соответствующая траектория системы (4) с заданным начальным состоянием доставляет вектор-функционалу ℓ предписанное значение γ, какой бы ни была конечная последовательность импульсных возмущений, приводящих к разрывам траектории $\Delta y(t_1),...,\Delta y(t_m)$ и действующих на некотором известном промежутке $[0,T_0]\subset[0,T)$. Напомним, что всякий линейный ограниченный вектор-функционал $\ell : DS^n(m) \to R^N$ имеет представление

$$\ell y = \int_0^T \Phi(s)\dot{y}(s)ds + \Psi y(0) + \sum_{k=1}^{m}\Psi_k \Delta y(t_k), \quad (6)$$

где элементы $(N\times n)$-матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном на $[0,T]$; $\Psi, \Psi_k, k=1,...,m$ – постоянные $(N\times n)$-матрицы. Условия $\ell y = \gamma$ охватывают многочисленные классы конкретных целевых условий, встречающихся в приложениях (см., например, [14, 16]), в том числе, двух- и многоточечные, интегральные, нагруженные интегральные и др.

Для решения задачи (4)–(5) предлагается следующая конструкция управления. Зафиксируем разбиение отрезка $[0,T_0]$ точками $\tau_1<\tau_2<...<\tau_K<T_0$ и обозначим $u_0(t)=\chi_{[0,\tau_1]}(t), u_1(t)=\chi_{[\tau_1,\tau_2]}(t),...,u_K(t)=\chi_{[\tau_K,T_0)}(t)$. Функции $u_i(t)$, имеющие носитель на $[0,T_0]$, будут использованы для построения компоненты программного управления системой (4). Отрезок $[T_0,T]$ разобъем точками $\vartheta_1<\vartheta_2<...<\vartheta_M<T$ и обозначим $v_0(t)=\chi_{[T_0,\vartheta_1]}(t), v_1(t)=\chi_{[\vartheta_1,\vartheta_2]}(t),...,v_M(t)=\chi_{[\vartheta_M,T]}(t)$. Функции v_j имеют носитель на $[T_0,T]$ и будут использоваться для построения позиционного управления по информации о скачках траектории, произошедших до момента времени T_0. Предлагаемая конструкция управления имеет вид

$$u(t) = \sum_{i=0}^{K}u_i(t)q_i + \sum_{i=0}^{M}v_i(t)r_i,\ q_i, r_i \in R^\nu. \quad (7)$$

Для формулировки теоремы об условиях разрешимости задачи управления (4)–(5) введем следующие обозначения:

$$\Theta(s) = \Phi(s) + \int_s^T \Phi(\tau)C_\tau'(\tau,s)d\tau,$$

$$H_k^\delta = \frac{1}{\delta}\int_{t_k}^{t_k+\delta}\Theta(s)ds,\ k=1,...,m,$$

$$h = \int_0^T \Theta(s)ds, \quad \Lambda = \int_0^T \Phi(s)\dot{Y}(s)ds,$$

$$\Lambda_k = \int_0^T \Phi(s)\dot{Y}_k(s)ds + \Psi_k,\ k=1,...,m;$$

$$B(u(\cdot)E) = (B(u(\cdot)e_1),...,B(u(\cdot)e_\nu)),$$

где e_j – j-й столбец единичной $(\nu\times\nu)$–матрицы;

$$U_i = \int_0^T \Theta(s)[B(u_i(\cdot)E)](s)ds,\ i=0,...,K;$$

$$V_j = \int_0^T \Theta(s)[B(v_j(\cdot)E)](s)ds,\ j=0,...,M;$$

$$V = (V_0,V_1,...,V_M) = (v^{\lambda\mu})_{\lambda=1,...,N,\mu=1,...,(M+1)\nu}.$$

Теорема. Пусть $(M+1)\nu \ge N$. Пусть далее $q_i^0, i=0,...,K$ – решение системы

$$\sum_{i=0}^{K}U_i(t)q_i = \gamma - \Lambda\alpha - h \quad (8)$$

и для каждого $\lambda=1,...,N$ существует общая подпоследовательность $\{\mu_l\}, l=1,...,N$ различных элементов последовательности индексов $\{1,\ldots,(M+1)\nu\}$, такая, что $(N\times N)$-матрица $W=(v^{\lambda\mu_l})_{\lambda=1,\ldots,N,l=1,\ldots,N}$ обратима.

Тогда задачу (4)–(5) решает управление (7), где

$$q_i = q_i^0,\, i=0,\ldots,K,$$

$$col(r_0,r_1,\ldots,r_M)=col(\rho_\mu)_{\mu=1,\ldots,(M+1)\nu},$$

$$\rho_\mu=\begin{cases}\rho_{\mu_l}, & \text{если } \mu=\mu_l,\, l=1,\ldots,N,\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

$$(\rho_{\mu_l})_{l=1,\ldots,(M+1)\nu}=W^{-1}\sum_{k=1}^{m}(H_k^\delta-\Lambda_k)\Delta y(t_k).$$

Доказательство. Воспользуемся для описания управлений, решающих задачу (4)–(5), представлением (3) общего решения уравнения $(\mathcal{L}y)(t)=f(t),\, t\in[0,T]$, где $f(t)=I_\delta(t,\Delta y)+(Bu)(t)+g(t)$:

$$y(t)=Y(t)\alpha+\sum_{k=1}^{m}Y_k(t)\Delta y(t_k)+\int_0^t C(t,s)I_\delta(s,\Delta y)ds+$$
$$+\int_0^t C(t,s)(Bu)(s)ds+\int_0^t C(t,s)g(s)ds. \qquad (9)$$

Для вычисления значений целевого вектор-функционала ℓ последовательно на слагаемых правой части в (9) используем представление (6). При этом понадобится формула дифференцирования по t для интеграла $+\int_0^t C(t,s)f(s)ds$. Как показано в [8],

$$\frac{d}{dt}\{\int_0^t C(t,s)f(s)ds\}=\int_0^t C_t'(t,s)f(s)ds+f(t).$$

С учетом этого применение вектор-функционала ℓ к интегралу с матрицей Коши приводит к следующему интегральному представлению:

$$\ell\{\int_0^{(\cdot)} C(t,s)f(s)ds\}=\int_0^T\Phi(\tau)\{\int_0^\tau C_\tau'(\tau,s)f(s)ds\}d\tau+$$
$$+\int_0^T\Phi(\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^T\{\int_s^T\Phi(\tau)C_\tau'(\tau,s)d\tau\}f(s)ds+$$
$$+\int_0^T\Phi(s)f(s)ds=\int_0^T\Theta(s)f(s)ds,$$

где

$$\Theta(s)=\Phi(s)+\int_s^T\Phi(\tau)C_\tau'(\tau,s)d\tau.$$

Используя это представление, вычислим

$$\ell\{\int_0^{(\cdot)} C(t,s)I_\delta(s,\Delta y)ds\}=$$
$$=\int_0^T\Theta(s)\{-\frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{m}\chi_{[t_k,t_k+\delta]}(s)\,E\}ds\,\Delta y(t_k)=$$
$$=-\sum_{k=1}^{m}H_k^\delta\Delta y(t_k),\ \text{где}\ H_k^\delta=\frac{1}{\delta}\int_{t_k}^{t_k+\delta}\Theta(s)ds.$$

Теперь последовательно находим значения ℓY и $\ell Y_k, k=1,\ldots m$:

$$\ell Y=\int_0^T\Phi(s)\dot Y(s)ds+\Psi,\ \ell Y_k=\int_0^T\Phi(s)\dot Y_k(s)ds+\Psi_k.$$

И, наконец, вычисляем значение целевого вектор-функционала на слагаемом, содержащем управляющие воздействия (7). Для этого запишем $u_i(t)q_i$ и $v_j(t)r_j$ в виде $u_i(t)E_\nu q_i$ и $v_j(t)E_\nu r_j$ соответственно. Введем обозначение

$$[Bu_i(\cdot)E_\nu](t)=([Bu_i(\cdot)e_1](t),\ldots,[Bu_i(\cdot)e_\nu](t)),$$

где e_j – j-й столбец единичной $(\nu\times\nu)$-матрицы E_ν. Далее имеем

$$\ell\{\int_0^{(\cdot)} C(\cdot,s)[Bu_i(\cdot)E_\nu](s)ds\}\cdot q_i=$$
$$=\int_0^{(\cdot)}\Theta(s)[Bu_i(\cdot)E_\nu](s)ds\cdot q_i=U_i\cdot q_i.$$

В последнем выражении учтены ранее введенные обозначения. Аналогично

$$\ell\{\int_0^{(\cdot)} C(\cdot,s)[Bv_j(\cdot)E_\nu](s)ds\}\cdot r_j=$$
$$=\int_0^T\Theta(s)[Bv_j(\cdot)E_\nu](s)ds\cdot r_j=V_j\cdot r_j.$$

Теперь окончательный результат можно записать в виде линейной системы относительно векторов q_i и r_j:

$$\Lambda\alpha+\sum_{k=1}^{m}\Lambda_k\Delta y(t_k)-\sum_{k=1}^{m}H_k^\delta\Delta y(t_k)+$$
$$+h+\sum_{i=0}^{K}U_i\cdot q_i+\sum_{j=0}^{M}V_j\cdot r_j=\gamma. \qquad (10)$$

Напомним, что векторы q_i определяют программное управление с носителем на промежутке $[0,T_0)$, а векторы r_i – управление с носителем на промежутке $[T_0,T]$, при этом к моменту времени T_0 становится известной информация о всех произошедших скачках траектории. Кроме того, из свойства вольтерровости оператора B, отвечающего за реализацию управляющих воздействий, следует, что действие базисных компонент управления u_i (v_j) начинается не ранее соответствующего момента времени τ_i (ϑ_j). Учитывая это, при определении q_i мы будем исходить из информации, не связанной с $\Delta y(t_k)$, а именно определим векторы $q_i^0, i = 0,...,K$ как решение системы

$$\sum_{i=0}^{K} U_i \cdot q_i \quad = \gamma - \Lambda\alpha - h. \qquad (11)$$

Отметим, что при отсутствии импульсных воздействий на систему управления (случай, когда все $\Delta y(t_k) = 0$), программное управление, определяемое векторами $q_i^0, i = 0,...,K,$ дает решение поставленной задачи управления и все компоненты r_j можно положить равными нулю. При наличии импульсных воздействий управлению с базисными функциями v_j отводится роль корректирующего позиционного управления, в конструкцию которого включаются все $\Delta y(t_k)$. При этом компоненты r_i определяются как решение системы

$$\sum_{j=0}^{M} V_j \cdot r_j = \sum_{k=1}^{m} H_k^b \Delta y(t_k) - \sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \Delta y(t_k). \quad (12)$$

В условиях теоремы существует отличный от нуля минор порядка N матрицы коэффициентов этой системы, определяемый подпоследовательностью индексов $\{\mu_l\}$, $l = 1,...,N.$ Полагая компоненты вектора $(\rho_\mu)_{\mu=1,...,(M+1)\nu}$ с индексами, не входящими в указанную подпоследовательность, равными нулю, получаем для остальных компонент систему с обратимой матрицей коэффициентов W. Это позволяет выразить искомые компоненты векторов r_j через $\Delta y(t_k)$, $k = 1,...,m$ и, таким образом, построить корректирующее позиционное управление.

Приведем иллюстрирующий пример.

Пример. Рассмотрим систему управления

$$\dot{y}(t) + 0.5y(t) = -\frac{1}{0.1}\sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k, t_k+0.1]}(t)\Delta y(t_k) + u(t), t \in [0,3]$$

с начальным состоянием $y(0) = 3$ и целевыми условиями $y(3) = 5$, $\int_0^3 y(s)ds = 20$. Будем использовать следующую систему базисных функций:

$$u_0(t) = \chi_{[0,1)}(t), u_1(t) = \chi_{[1.1,2)}(t),$$
$$v_0(t) = \chi_{[2.8,2.9)}(t), v_1(t) = \chi_{[2.9,3]}(t).$$

Программное управление определяется следующими значениями: $q_0 = 7.694$, $q_1 = 4.785$ (здесь и ниже все числовые значения приведены с точностью до одной тысячной). Компоненты r_j приведем для случая $t_1 = 1.000, t_2 = 1.500$:

$$r_0 = -1.966\Delta y(t_1) - 2.524\Delta y(t_2),$$
$$r_1 = \ \ 1.966\Delta y(t_1) + 2.524\Delta y(t_2).$$

Траектория, доставляющая заданные целевые значения при отсутствии импульсных возмущений, представлена на рис. 1. Результат парирования импульсных возмущений $\Delta y(t_1) = -1, \Delta y(t_2) = -1$ и программной коррекции показан на рис. 2. Для сравнения ниже приведены: траектория, возмущенная теми же импульсными воздействиями, но без позиционной и программной коррекции (рис. 3), и траектория без позиционного парирования возмущений только с позиционной коррекцией (рис. 4).

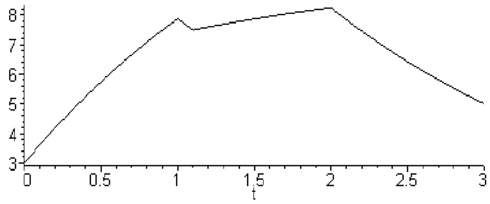

Рис. 1

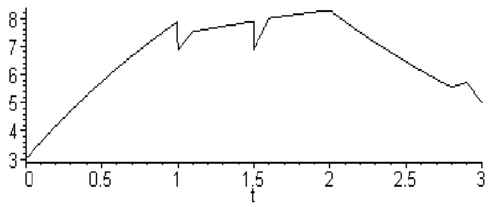

Рис. 2

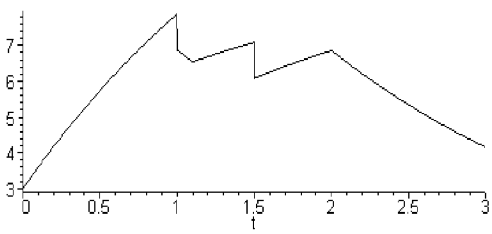

Рис. 3

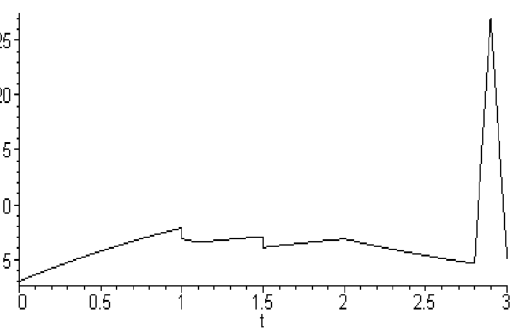

Рис. 4

Список литературы

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию

функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

3. *Анохин А.В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1037–1040.

4. *Дыхта В.А.* Импульсное оптимальное управление в моделях экономики и квантовой электроники // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 100–112.

5. *Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2003. 256 с.

6. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.

7. *Исламов Г.Г.* О допустимых помехах линейных управляемых систем // Известия высших учебных заведений. Математика. 2002. № 2. С. 37–40.

8. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения, Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 4. С. 601–606.

9. *Максимов В.П.* Об одном подходе к задаче наведения системы в окрестность нормативной траектории // Вестник Пермского университета. Экономика. 2008. № 8(24). С. 108–112.

10. *Максимов В.П.* Импульсная коррекция управления для динамических моделей с последействием // Вестник Пермского университета. Экономика. 2009. №1(1). С. 91–95.

11. *Максимов В.П.* Управление функционально-дифференциальной системой в условиях импульсных возмущений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 9. С. 70–74.

12. *Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* О представлении решений линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9. № 6. С. 1026–1036.

13. *Максимов В.П., Румянцев А.Н.* Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 56–71.

14. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Экономика. 2011. № 2(9). С. 13–23.

15. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* О одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 9. С. 72–76.

16. *Максимов В.П., Поносов Д.А., Чадов А.Л.* Некоторые задачи экономико-математического моделирования // Вестник Пермского университета. Экономика. 2010. № 2(5). С. 45–50.

17. *Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространстве функций ограниченной вариации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 226–233.

18. *Ashordia M.* On the stability of solutions of the multipoint boundary value problem for the system of generalized ordinary differential equations // Memoirs on Diff. Equations and Math. Phys. 1995. V. 6. P. 1–57.

19. *Azbelev N.V., Maksimov V. P., and Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. N.Y.: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.

20. *Fetisova Yu.V., Sesekin A.N.* Discontinuous solutions of differential equations with time delay // WSEAS Transactions on Systems. 2005. T. 4. № 5. P. 487–492.

21. *Kurzweil Ja.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Czechoslovak Math. J. 1957. № 7. P. 418–449.

22. *Maksimov V.P.* Theory of functional differential equations and some problems in Economic Dynamics // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications. N.Y.: Hindawi Publishing Corporation, 2006. P. 757–765.

23. *Maksimov V.P.* Problems of impulsive and mixed control for linear functional-differential systems // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2006. № 3(37). P. 87–88.

24. *Schwabik S.* Generalized ordinary differential equations. Singapore: World Scientific, 1992. 392 p.

25. *Schwabik S., Tvrdy M., and Veivoda O.* Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. Prague, Academia: Prague, 1979. 252 p.

26. *Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.* Dynamic impulse systems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 268 p.

References

1. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Vvedenie v teoriyu funktsional’no-differentsial’nykh uravnenii

[Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow: Nauka. 1991. 280 p.

2. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii [Elements of the contemporary theory of functional differential equations]. Moscow: Institute of computer-assisted study. 2002. 384 p.

3. *Anokhin A.V.* O lineinykh impulsnykh sistemakh dlya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii [On impulse systems for functional differential equations] // Doklady Akademii Nauk USSR [Soviet Math Dokl]. 1986. V. 286. № 5. P. 1037–1040.

4. *Dykhta V.A.* Impul'snoe optimal'noe upravlenie v modelyakh ekonomiki i kvantovoi elektroniki [Impulse optimal control in models of Economy and Quantum Electronics] // Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control]. 1999. № 1. P. 100–112.

5. *Dykhta V.A., Samsonyuk O.N.* Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami [Optimal impulse control and applications]. Moscow: Physmatlit [Physics and Mathematics]. 2003. 256 p.

6. *Zavalishchin S. T., Sesekin A.N.* Impul'snye protsessy: modeli i prilozheniya [Impulse processes: models and applications]. Moscow: Nauka. 1991. 256 p.

7. *Islamov G.G.* O dopustimykh pomekhakh lineinykh upravlyaemykh system [On admissible disturbances in linear control systems] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika [Russian Mathematics (IzVUZ)]. 2002. № 2. P. 37–40.

8. *Maksimov V.P.* O formule Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya [On the Cauchy formula for a functional differential equations] // Differentsial'nye Uravneniya [Differential Equations]. 1977. V. 13. № 4. P. 601–606.

9. *Maksimov V.P.* Ob odnom podkhode k zadache navedeniya sistemy v okrestnost' normativnoi traektorii [An approach to the problem of directing the system to a neighborhood of a normative trajectory] // Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika [Perm University Herald. Economics]. 2008. № 8. P. 108–112.

10. *Maksimov V.P.* Impul'snaya korrektsiya upravleniya dlya dinamicheskikh modelei c posledeistviem [Impulsive correction of the control for dynamic models with aftereffect] // Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika [Perm University Herald. Economics]. 2009. №1. P. 91–95.

11. *Maksimov V.P.* Upravlenie funktsional'no-differentsial'noi sistemoi v usloviyakh impul'snykh vozmushchenii [Control of a functional differential system under impulse disturbances]// Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika [Russian Mathematics (IzVUZ)]. 2013. № 9. P. 70–74.

12. *Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* O predstavlenii reshenii lineinogo funktsional'no-differetsial'nogo uravneniya [Representation of solutions to a linear functional differential equation]// Differentsial'nye Uravneniya [Differential Equations]. 1973. V. 9. № 6. P. 1026–1036.

13. *Maksimov V.P., Rumyantsev A.N.* Kraevye zadchi i zadachi impul'snogo upravleniya v ekonomicheskoi dinamike. Konstruktivnoe issledovanie [Boundary value problems and problems of pulse control. Constractive study] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii.
Matematika [Russian Mathematics (IzVUZ)]. 1993. № 5. P. 56–71.

14. *Maksimov V.P., Chadov A.L.* Gibridnye modeli v zadachakh ekonomicheskoi dinamiki [Hybrid models in economic dynamics problems] // Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika [Perm University Herald. Economics]. 2011. № 2. P. 13–23.

15. *Maksimov V.P., Chadov A.L.* Ob odnom klasse upravlenii dlya funtsional'no-differentsial'noi nepreryvno-diskretnoi sistemy [On a class of control for a functional differential continuous-discrete system] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika [Russian Mathematics (IzVUZ)]. 2012. № 9. P. 72–76.

16. *Maksimov V.P., Ponosov D.A., Chadov A.L.* Nekotorye zadachi ekonomiko-matematicheskogo modelirovaniya [Some problems in economic mathematical modeling] // Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika [Perm University Herald. Economics]. 2010. № 2(5). P. 45–50.

17. *Sesekin A.N., Fetisova Yu.V.* Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstve funktsii ogranichennoi variatsii [Functional differential equations in the space of functions with bounded variation] // Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya Rossiiskoi akademii nauk [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics. Ural Branch of RAS]. 2009. V.15. № 4. P. 226–233.

18. *Ashordia M.* On the stability of solutions of the multipoint boundary value problem for the system of generalized ordinary differential equations // Memoirs on Diff. Equations and Math. Phys. 1995. V. 6. P. 1–57.

19. *Azbelev N.V., Maksimov V. P., and Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. N.Y.: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.

20. *Fetisova Yu.V., Sesekin A.N.* Discontinuous solutions of differential equations with time delay // WSEAS Transactions on Systems. 2005. T. 4. № 5. P. 487–492.

21. *Kurzweil Ja.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Czechoslovak Math. J. 1957. № 7. P. 418–449.

22. *Maksimov V.P.* Theory of functional differential equations and some problems in Economic Dynamics // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications. N.Y.: Hindawi Publishing Corporation, 2006. P. 757–765.

23. *Maksimov V.P.* Problems of impulsive and mixed control for linear functional-differential systems // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta [Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University]. 2006. № 3(37). P. 87–88.

24. *Schwabik S.* Generalized ordinary differential equations. Singapore: World Scientific, 1992. 392 p.

25. *Schwabik S., Tvrdy M., and Veivoda O.* Differential and integral equations: Boundary value problems and adjoints. Praha: Academia, 1979. 252 p.

26. *Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.* Dynamic impulse systems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 268 p.