

## РАЗДЕЛ II. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 330.4  
ББК 65в631

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА РАЗЛИЧНЫХ СТРАН С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СОЦИАЛЬНЫХ ГРУПП**

**В.Д. Матвеев**, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой экономики

Электронный адрес: [vmatveenko@hse.ru](mailto:vmatveenko@hse.ru)

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики в Санкт-Петербурге, ул. Седова, 55, корп. 2, 193171, г. С-Петербург, Россия,

**Н.Н. Оленев**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отдела математического моделирования экономических систем

Электронный адрес: [nolenev@ccas.ru](mailto:nolenev@ccas.ru)

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, ул. Вавилова, 40, 119333, г. Москва, Россия

**А.В. Шатров**, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования в экономике

Электронный адрес: [avshatrov1@yandex.ru](mailto:avshatrov1@yandex.ru)

Вятский государственный университет, ул. Московская, 36, 610000, г. Киров, Россия

На основании теории эндогенного роста мы даем возможное объяснение различий в развитии народных хозяйств мира и их реакции на глобальные экономические кризисы. Ранее одним из авторов (Матвеев, 2007, 2010) был предложен подход к моделированию выбора технологий в странах. Технический прогресс смоделирован как изменение параметров производственной функции CES  $Y = A(\alpha K^p + (1 - \alpha)L^p)^{1/p}$ . Параметры определяют доли факторов производственной функции, в частности, для функции Кобба – Дугласа это доля капитала  $\alpha$ . Большое различие  $\alpha$  в разных странах было найдено недавно опытным путем несколькими авторами. Выбор параметра зависит от интересов социальных групп: работники и владельцы капиталов соглашаются на изменение параметра  $\alpha$ , если это приводит к увеличению дохода этой группы. Таким образом, можно определить области совпадения и несовпадения интересов социальных групп в плоскости  $\alpha$ - $k$ , где  $k$  – отношение капитала к труду. При помощи статистических данных UNSTATS мы строим графики параметрических зависимостей  $\alpha$ - $k$  для экономических систем США, Японии, России, Китая и Ирана в течение периода 2000–2010 гг. Области совпадения/несовпадения интересов и их изменения на графиках отражают подпериоды экономических кризисов.

*Ключевые слова:* моделирование, экономический рост, производственные функции, динамика взаимодействия социальных групп.

#### **Введение**

Производственная функция показывает выпуск продукта в стране в зависимости от затрат факторов (капитал  $K$  и труд  $L$ , интерпретируемых как социальные группы). При этом мы предполагаем, что экономические агенты принимают решения в рамках «принципа рациональных ожиданий» [8, 9]. Понимая, что эта точка зрения далеко не единственная (см. например, [7], [10]), мы получаем возможность конструктивного анализа интересов социальных групп. В данной работе рассматривается на основе теории эндогенного роста [2, 3, 13, 15] попытка

объяснения с помощью модифицированных производственных функций  $\alpha$ -CES различий в развитии мировых экономик на примерах различных стран. Главным фактором различий в данной постановке является учет интересов социальных групп (в терминах производственных функций – долей владельцев факторов ПФ) в разных странах в период финансового кризиса 2008–2010 гг. Идея этого подхода предложена в работах [2, 3, 13] на примере ПФ Кобба – Дугласа и CES для описания взаимодействия социальных групп в условиях экономического роста без привязки к экономике какой-либо страны. Далее

эта методика была применена к анализу взаимодействия социальных групп для развивающихся стран [4]. Социальные группы – работники и капиталисты – соглашаются на изменение параметра  $\alpha$  своей доли ВВП, если при этом увеличивается их доход. Таким образом, представляется возможным в параметрическом пространстве  $\alpha$ - $k$  построить область совпадения/несовпадения интересов важнейших социальных групп. Получены графики параметрических зависимостей  $\alpha$ - $k$  для экономики США, Японии, России, КНР и Ирана в период с 2000 по 2010 г. Полученные результаты в динамике для каждой из стран идентифицируют период кризиса изменением области совпадения интересов.

### 1. Производственные функции и интересы социальных групп

Модифицированная производственная функция типа CES имеет вид

$$F(K, L) = [\alpha(A_K K)^p + (1-\alpha)(A_L L)^p]^{1/p}. \quad (1.1)$$

Здесь  $A_K, A_L > 0$  – коэффициенты эффективности факторов,  $0 < \alpha < 1$ ,  $p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$  – параметры. Функция CES в частном случае  $A_K = A_L$  записывается в виде

$$F(K, L) = A[\alpha K^p + (1-\alpha)L^p]^{1/p}, \quad (1.2)$$

где  $A$  – общая производительность факторов. Величина  $p$  и эластичность замещения факторов  $\sigma$  связаны между собой равенством

$$p = 1 - \frac{1}{\sigma}. \quad (1.3)$$

Параметры производственной функции различаются для различных стран и во времени. Они отражают институты страны. Рассмотрим модель, в которой весовой параметр  $\alpha$  может быть предметом выбора владельцев факторов – в случае выбранной производственной функции они представляют собой социальные группы капиталистов и работников.

Будем определять интересы владельцев факторов, исходя из условий возрастания их доходов,  $(\partial F / \partial K)K$  и  $(\partial F / \partial L)L$ . Условием возрастания дохода капиталистов в случае  $A_K = A_L$  является неравенство

$$\frac{\alpha}{p} [1 - (k)^p] < 1, \quad (1.4)$$

где  $k = \frac{K}{L}$ . Условием возрастания дохода работников является неравенство

$$\frac{(1-\alpha)}{p} \left[ 1 - \left( \frac{1}{k} \right)^p \right] > 1. \quad (1.5)$$

Выделим два случая: 1)  $0 < k < 1$  – труд является избыточным фактором; 2)  $k > 1$  – капитал является избыточным фактором. В первом случае

обратимся сначала к интересам капиталистов. В (1.4) выражение в квадратных скобках отрицательно и левая часть положительна. Условие возрастания дохода капиталистов эквивалентно неравенству

$$\alpha < \frac{p}{1 - (k)^p}. \quad (1.6)$$

Заметим, что функция, стоящая в правой части, возрастает по  $k$  и достигает значения 1 при  $k = a(p) = (1-p)^{1/p}$ . Это значит, что при  $k \in (0, a(p))$  капиталисты заинтересованы в увеличении  $\alpha$  лишь при условии (1.6), а при  $k \in (a(p), 1)$  – безусловно. Что касается работников, в первом случае в левой части неравенства (1.5) стоит отрицательное число, т.е. неравенство (1.5) несовместно. Это означает, что, работники в данном случае заинтересованы в уменьшении параметра  $\alpha$ .

Во втором случае левая часть неравенства (1.4) отрицательна, т.е. (1.4) выполняется автоматически: капиталисты? Безусловно? Заинтересованы в увеличении параметра  $\alpha$ . Для работников перепишем неравенство (1.5) в виде

$$\alpha < 1 - \frac{p}{1 - \left( \frac{1}{k} \right)^p}. \quad (1.7)$$

Правая часть возрастает по  $p$  и меняет знак в точке:

$$b(p) = \left( \frac{1}{1-p} \right)^{1/p}. \quad (1.8)$$

При  $k \in (1, b(p))$  работники заинтересованы в снижении  $\alpha$ , а при  $k > b(p)$  и условии (1.7) – в повышении  $\alpha$ . Таким образом, для CES-функции при  $p < 0$  на плоскости  $(k, \alpha)$  имеются две области совпадения интересов социальных групп:

а) в области

$$\Omega_p^\downarrow = \left\{ (k, \alpha) : 0 < k < a(p), \alpha > \frac{p}{1 - (k)^p} \right\} \text{ обе}$$

социальные группы соглашаются на уменьшение параметра  $\alpha$ ;

б) в области

$$\Omega_p^\uparrow = \left\{ (k, \alpha) : k > b(p), \alpha < 1 - \frac{p}{1 - \left( \frac{1}{k} \right)^p} \right\} \text{ обе}$$

социальные группы соглашаются на увеличение параметра  $\alpha$ .

В остальной части полосы  $0 < \alpha < 1$  интересы социальных групп расходятся.

## 2. Идентификация производственных функций по статистическим данным

Использование производственных функций в описанной модели требует определения и задания необходимых параметров и факторов. Очевидно, что это можно сделать по статистическим данным за требуемый период времени. Однако если с данными по трудовым ресурсам не возникает проблем (данные можно взять, например, из статистики ООН: United Nations Statistics Division – National Accounts [16]), то по капиталу таких данных нет. Поэтому мы воспользуемся методикой [6], согласно которой идентификация модели заключается в определении её внешних параметров на основе исторических данных. Часть параметров оценивается прямым образом на основе имеющихся статистических данных. Большую часть параметров оценивают косвенным образом, сравнивая расчётные временные ряды показателей модели с их статистическими аналогами.

Учтем в модели внешнеторговый оборот страны и изменение относительных цен на составляющие основного макроэкономического баланса с помощью некоторых заданных функций, параметры которых определим из данных экономической статистики. Пусть  $Y(t)$  – это однородная производственная функция объемов капитала  $K(t)$  и труда  $L(t)$  с постоянной эластичностью замещения (CES-функцией).

Эффективная стоимость производственных фондов  $K(t)$  меняется в силу уравнения

$$\frac{dK}{dt} = J - \mu K, \quad K(0) = K_0, \quad (2.1)$$

где  $\mu$  – темп выбытия капитала, а  $J(t)$  – скорость прироста нового капитала (инвестиции в основной капитал).

Труд измеряется среднегодовым числом занятых в народном хозяйстве. На основе статистических данных полагаем, что труд  $L(t)$  растет с постоянным темпом  $\gamma > 0$  (см. например, [6]):

$$\frac{dL}{dt} = \gamma L(t), \quad L(0) = L_0. \quad (2.2)$$

Пусть в каждый момент времени  $t$  выполняется основной макроэкономический продуктовый баланс в текущих ценах:

$$\rho_Y Y(t) + \rho_I I(t) = \rho_C C(t) + \rho_J J(t) + \rho_E E(t), \quad (2.3)$$

где сумма слева – это сумма выпуска ВВП и импорта  $\rho_Y Y(t)$ ,  $\rho_I I(t)$ , а справа – сумма конечного потребления населения, правительства и некоммерческих предприятий с добавлением чистого накопления богатств и прироста материальных запасов  $\rho_C C(t)$ , инвестиций в основной капитал  $\rho_J J(t)$  и экспорта  $\rho_E E(t)$ . Через  $\rho_Y, \rho_I, \rho_C, \rho_J, \rho_E$  обозначены дефляторы ВВП, цен на импорт, конечное потребление, инвестиции и экспорт.

Поскольку необходимы значения величин выпуска, инвестиций, экспорта и импорта, выраженные в постоянных ценах (в ценах 2005 г.), то перейдем к продуктовому балансу, выраженному в индексах относительных цен:

$$Y(t) + \pi_I(t)I(t) = \pi_C(t)C(t) + \pi_J(t)J(t) + \pi_E(t)E(t), \quad (2.4)$$

где индексы относительных цен импорта, инвестиций и экспорта заданы отношениями

$$\pi_Y(t) = \frac{\rho_Y}{\rho_Y} = 1, \quad \pi_I(t) = \frac{\rho_I}{\rho_Y}, \quad \pi_C(t) = \frac{\rho_C}{\rho_Y}, \quad \pi_J(t) = \frac{\rho_J}{\rho_Y}, \quad \pi_E(t) = \frac{\rho_E}{\rho_Y}, \quad (2.5)$$

а выражение, балансирующее равенство (2.4), принимает вид

$$Y(t) + \pi_I(t)I(t) = Q(t) + \pi_J(t)J(t) + \pi_E(t)E(t), \quad (2.6)$$

$$Q(t) = \frac{\rho_C}{\rho_Y} C(t).$$

Для решения вышеперечисленной системы уравнений необходимо определить объемы инвестиций  $J(t)$ , экспорта  $E(t)$  и импорта  $I(t)$  в постоянных ценах 2005 г., предполагая, что эти объемы определяются постоянными параметрами.

Объем инвестиций в постоянных ценах  $J(t)$  определяется долей  $\mathcal{G}$  текущей стоимости инвестиций в сумме текущих стоимостей выпуска и импорта:

$$\mathcal{G} = \frac{\pi_J(t)J(t)}{Y(t) + \pi_I(t)I(t)}. \quad (2.7)$$

Объем экспорта в постоянных ценах  $E(t)$  определяется долей  $\delta$  экспорта в выпуске (по их текущим стоимостям):

$$\delta = \frac{\pi_E(t)E(t)}{Y(t)}. \quad (2.8)$$

Объем импорта в постоянных ценах  $I(t)$  определяется отношением  $\rho$  импорта к разнице ВВП и экспорта (по их текущим стоимостям):

$$\rho = \frac{\pi_I(t)I(t)}{Y(t) - \pi_E(t)E(t)}. \quad (2.9)$$

Для идентификации модели необходимо задать изменение внешних интенсивных параметров модели: относительных цен  $\pi_I(t)$ ,  $\pi_C(t)$ ,  $\pi_J(t)$ ,  $\pi_E(t)$ , постоянных параметров  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\delta$ ,  $\rho$  и три начальных значения  $K(0)$ ,  $L(0)$ ,  $Y(0)$ , чтобы расчетные временные ряды макропоказателей (переменные модели) были близки к статистическим временным рядам соответствующих макропоказателей экономики страны. Подчеркнем, что это не единственный способ оценки факторов производственных функций. В работе [1] рассматривается постановка краевой задачи для

оценки динамической модели многоотраслевой экономики.

### 3. Анализ динамики взаимодействия социальных групп

Динамику взаимодействия социальных групп можно оценить, рассматривая в течение заданного периода условия, которые отражают их интересы. Выбирая период с 2000 г. по 2010 г., мы ожидаем, что годы финансово-экономического кризиса должны определенным образом (опосредованно через макроэкономические показатели) повлиять на изменение конфигурации областей совпадения/несовпадения интересов социальных групп. Для сравнения рассмотрим динамику взаимодействия социальных групп в развитых странах – на примере США и развивающихся – на примере Китая, России и Ирана. Этот выбор обусловлен тем, что экономики этих стран репрезентативны с точки зрения общих и особенных тенденций мирового развития.

В настоящее время США является крупнейшей по экономическому потенциалу и ведущей по уровню экономического развития страной мира. Состояние и динамика экономики США во многом определяют общемировые тенденции экономического развития. США удерживают лидерство в мировой экономике последние 100 лет, однако с начала 2000-х гг. вследствие кризисов и роста развивающихся стран их влияние на мировую экономику несколько снизилось.

Экономика Японии – одна из самых развитых экономик мира. По размеру ВВП и объему промышленного производства Япония занимает 3-е место среди стран мира,

после США и КНР. При этом необходимо отметить тот факт, что экономика Японии в последние 15 лет находится в стадии стагнации.

Современный Китай играет важную роль в мировой экономике. Характерная черта современной китайской экономики – зависимость её от внешнего рынка. По объёму экспорта КНР занимает 1-е место в мире [12, 14].

Китай и Россия – это быстро развивающиеся страны, входящие в БРИКС. У России самый высокий уровень ВВП на душу населения среди стран БРИКС.

Иран имеет специфическую экономику, при этом занимает изолированную территорию. Экономика Ирана – одной из наиболее богатых стран Азии – 18-я в мире по объёму национального производства и крупнейшая среди государств Западной Азии, Ближнего Востока и ОПЕК. Иран по объёму ВВП является крупнейшей экономикой в исламском мире после Турции. Немаловажным фактором является функционирование экономики Ирана в условиях санкций.

#### 3.1 Анализ динамики взаимодействия социальных групп в группе развитых стран (США и Японии)

Используя представленную модель, проведем анализ экономики США (табл. 1). Условием возрастания дохода капиталистов является неравенство (1.4), а условием возрастания дохода работников – неравенство (1.6). Для их реализации используем данные статистики ООН: United Nations Statistics Division – National Accounts [16].

Таблица 1

Значения параметров  $\sigma$  и  $p$  для экономики США 2000–2010 гг.

Годы	$\sigma$	$p$	$L(t)$	$K(t)$
2000	0,17907	-4,58456	136,891	2213,8
2001	0,16706	-4,9857	136,933	2189,8
2002	0,1618	-5,18047	136,485	2124
2003	0,16104	-5,20947	137,736	2191,7
2004	0,16795	-4,95432	139,252	2328,2
2005	0,17147	-4,83194	141,730	2452,5
2006	0,17248	-4,79776	144,427	2509,9
2007	0,16385	-5,10303	146,047	2470,8
2008	0,14864	-5,72754	145,362	2327,9
2009	0,12348	-7,09848	139,877	1956,4
2010	0,13067	-6,65305	139,064	1990,9

**Случай 1.** Труд является избыточным фактором. В этом случае  $\alpha < -4,58458$ .

Функция, стоящая в правой части (1.6), возрастает по  $k$  и достигает значения 1 при

$$k = a(p) = (1 - p)^{1/p} = 0,68717.$$

Это значит, что при  $k \in (0; 0,68717)$  капиталисты заинтересованы в увеличении  $\alpha$  лишь при условии  $\alpha < -4,58458$ , а при  $k \in (0,68717; 1)$  – безусловно. Что касается работников, то, поскольку  $p < 0$ , неравенство (1.7) несовместно. Это

означает, что, работники в данном случае заинтересованы в уменьшении параметра  $\alpha$ .

**Случай 2.** Капитал является избыточным фактором. Поскольку  $p < 0$ , левая часть неравенства отрицательна; таким образом, неравенство (1.6) выполняется автоматически: капиталисты безусловно заинтересованы в увеличении параметра  $\alpha$ . Для работников действует неравенство (1.7). Его правая часть возрастает по  $p$  и меняет знак в точке

$$b(p) = \left( \frac{1}{1-p} \right)^{1/p} = 1,45524.$$

При  $k \in (1; 1,45524)$  работники заинтересованы в снижении  $\alpha$ , а при  $k > 1,45524$  и условии  $\alpha < 1$  – в повышении  $\alpha$ .

Таким образом, для CES-функции при  $p < 0$  на плоскости  $(k, \alpha)$  имеются две области совпадения интересов социальных групп:

а) в области

$\Omega_p^\downarrow = \{(k, \alpha) : 0 < k < 0,68717, \alpha > 0\}$  обе социальные группы соглашаются на уменьшение параметра  $\alpha$ ;

б) в области

$\Omega_p^\uparrow = \{(k, \alpha) : k > 1,45524, \alpha < 1\}$  обе

социальные группы соглашаются на увеличение параметра  $\alpha$ . В остальной части полосы  $0 < \alpha < 1$  интересы социальных групп расходятся.

Таблица 2

Данные для построения областей  $\Omega_p^\downarrow$  и  $\Omega_p^\uparrow$  экономики США

$\Omega_p^\downarrow = \{(k, \alpha) : 0 < k < 0,68717, \alpha > 0\}$		$\Omega_p^\uparrow = \{(k, \alpha) : k > 1,45524, \alpha < 1\}$	
$\alpha$	k	$\alpha$	k
0,1	0,432104	0	1,455244
0,2	0,500321	0,1	1,483218
0,3	0,544125	0,2	1,515721
0,4	0,576808	0,3	1,55415
0,5	0,602959	0,4	1,600611
0,6	0,624762	0,5	1,658487
0,7	0,643439	0,6	1,733679
0,8	0,659752	0,7	1,837811
0,9	0,67421	0,8	1,998716
1,0	0,68717	0,9	2,314258

По данным табл. 2 построим области совпадения и несовпадения интересов социальных групп, определяемых как факторы производственной функции CES. На рис. 1, 2 приведены графики, ограничивающие области совпадения и несовпадения интересов социальных групп. Наибольший сдвиг графиков наблюдается в

2009 г. Область, где интересы социальных групп расходятся, сузилась. Область, где обе социальные группы соглашаются на уменьшение параметра  $\alpha$ , увеличилась. Область, где обе социальные группы соглашаются на увеличение параметра  $\alpha$ , также увеличилась.

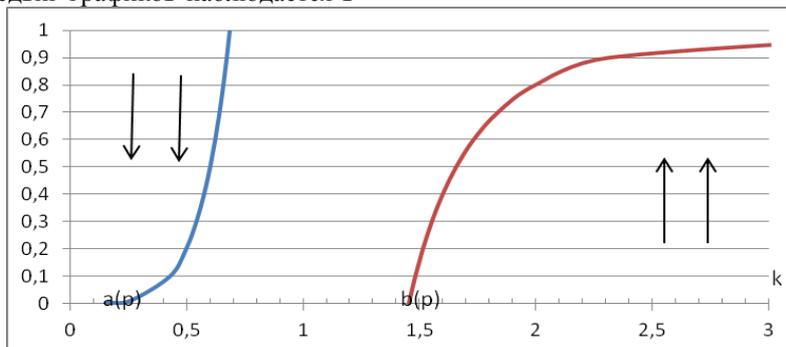


Рис. 1. Области совпадения и несовпадения интересов социальных групп в случае функции CES для экономики США 2000 г.

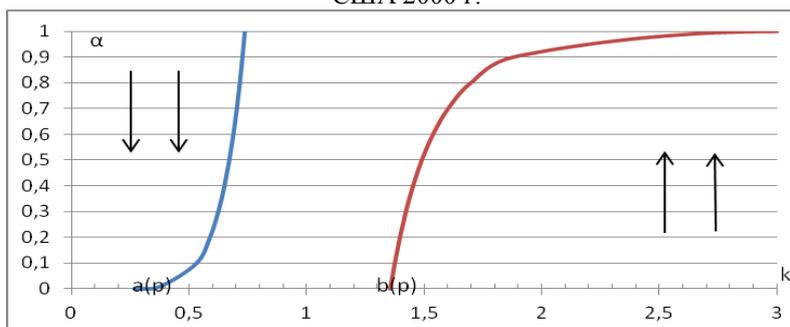


Рис. 2. Области совпадения и несовпадения интересов социальных групп в случае функции CES для экономики США 2010 г.

Наиболее характерным является поведение такой интегральной характеристики, как площадь области несовпадения интересов социальных групп. Эту интегральную характеристику можно вычислить по каждому году и проследить её динамику. На рис. 3 показана динамика этого показателя с 2000 по 2010 гг. Приведенный график показывает, что в годы обострения кризиса общество проявляет признаки консолидации –

размер площади области несовпадения интересов уменьшается.

Более того, можно говорить о том, что опыт преодоления кризисных ситуаций, в первую очередь накопленный в годы Великой депрессии, а также созданные в стране социально-экономические институты действительно работают и кризис в США приводит к определенной консолидации интересов социальных групп.

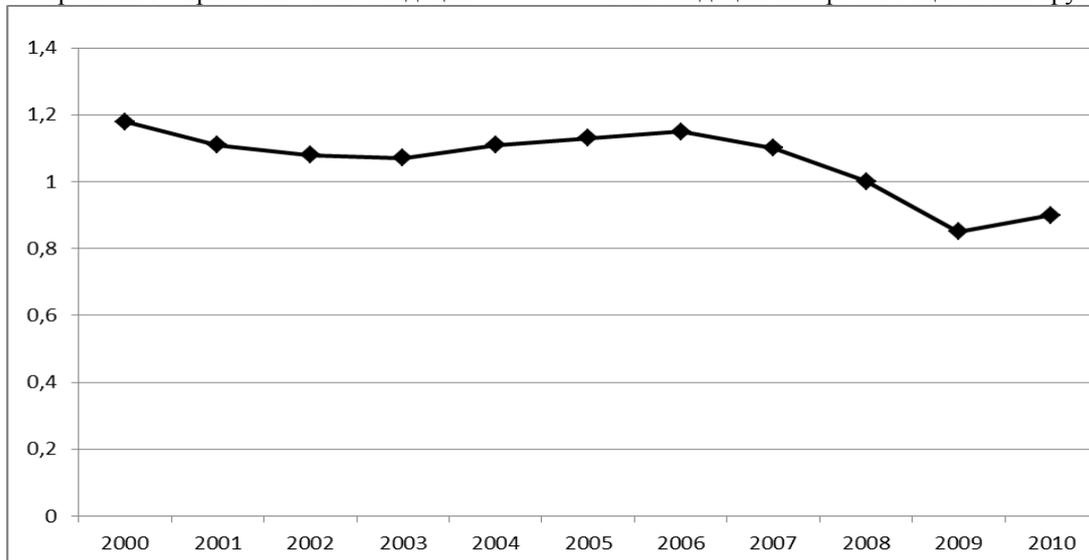


Рис. 3. Изменение площади области несовпадения интересов социальных групп для экономики США за 2000–2010 гг.

Следуя вышеизложенной методике, рассмотрим динамику взаимодействия социальных групп для экономики Японии. Таким образом, для заданных значений  $p < 0$  можем найти для экономики Японии в каждом году конфигурации

областей совпадения и несовпадения интересов социальных групп на плоскости  $(k, \alpha)$ .

Как и в предыдущем случае показательным является поведение интегральной характеристики – площади области несовпадения интересов социальных групп, приведенной на рис. 4.

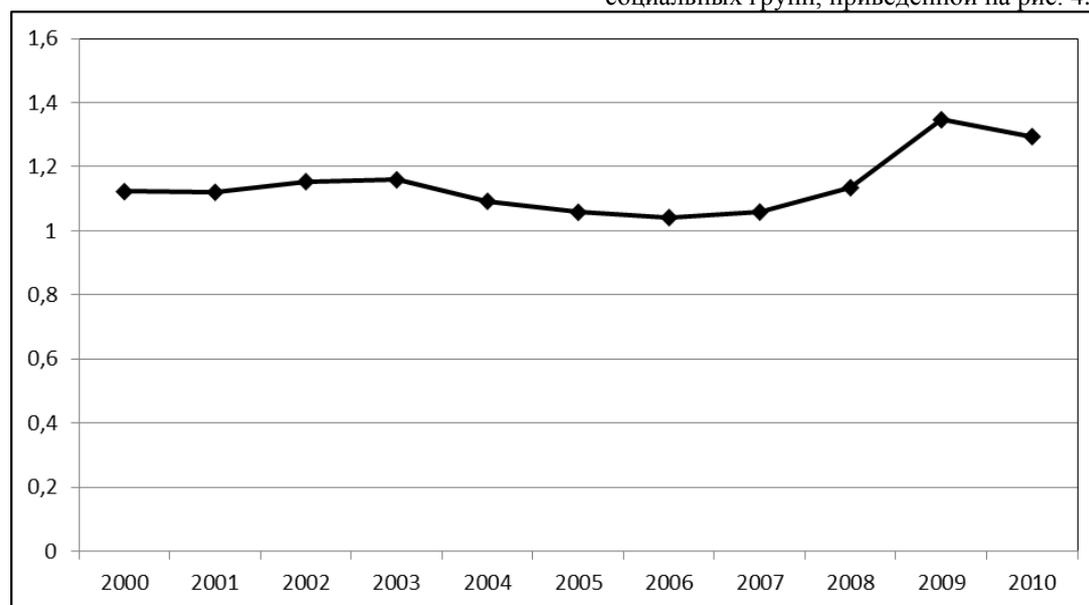


Рис. 4. Изменение площади области несовпадения интересов социальных групп для экономики Японии за 2000–2010 гг.

Эту интегральную характеристику вычислим приближенным интегрированием по каждому году и проследим динамику

взаимодействия социальных групп для японской экономики.

На рис. 4 можно проследить изменения взаимодействия социальных групп в Японии на протяжении 2000–2010 гг.: в первые 4 года происходит рост площади несогласованности интересов. Этому соответствуют годы неблагоприятного состояния японской экономики – стагнация в промышленности, рост безработицы [5]. Затем после принятия мер правительством Японии следуют относительно благополучные 4 года. В 2007 г. рост ВВП Японии составил 2%. Однако во втором полугодии 2008 г., по причине

мирового экономического кризиса, экономика Японии вошла в рецессию. Эта ситуация отображается на графике интегральной характеристики, пик которой приходится на 2009г. Отметим, что поведение интегральной характеристики взаимодействия социальных групп представляется вполне логичным.

Приведем таблицу значений параметра  $p$  по годам (табл. 3).

Таблица 3

Значения параметра  $p$  для экономики Японии за 2000–2010 гг.

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
$p$	-3,4977	-3,4715	-3,2297	-3,3079	-3,5210	-3,6730	-3,7387	-3,7846	-3,3775	-2,5521	-2,7423

Итак, с увеличением параметра  $p$  область несовпадения интересов социальных групп увеличивается и, наоборот, чем меньше параметр  $p$ , тем меньше область несовпадения интересов. Или, учитывая связь параметра  $p$  и эластичности замещения  $\sigma$ , чем больше эластичность замещения факторов, тем больше область несовпадения интересов социальных групп и наоборот.

На рис. 4 видно, что наибольшая область несовпадения интересов работников и капиталистов соответствует 2009 г., когда наблюдалось наибольшее значение параметра  $p = -2,5521$ . А в 2007 г. (когда параметр принял наименьшее значение  $p = -3,7846$ ) область несовпадения интересов наименьшая. На конец 2009 финансового года Япония занимала второе место в мире (после США) по номинальному значению ВВП, который составлял более 5 трлн долл. США, однако, по данным экспертов, в августе 2010 г. по этому показателю китайская экономика обогнала японскую; таким образом, японская экономика занимает третье место по объему ВВП и третье место по паритету покупательной способности (после США и Китая) [5, 12, 14].

### 3.2 Анализ динамики взаимодействия социальных групп в экономиках развивающихся стран

Китай, который считался стабильным хранителем капитала, столкнулся с массовой утечкой денег из страны. В течение 2010 г. из Китая «утекло» примерно 225 млрд долл., что эквивалентно 3% ВВП страны по данным Fogex.ru (2012) [12, 14]. Макроэкономические показатели экономики КНР рассчитаны по данным экономической статистики [16] и с помощью методики [6]. Используя метод анализа взаимодействия социальных групп, изложенный

выше на примере экономики США, проанализируем динамику взаимодействия социальных групп в терминах факторов производственной функции для экономики КНР. Результаты расчетов интегральной характеристики взаимодействия приведены на рис. 5.

Область, где обе социальные группы соглашаются на уменьшение параметра  $\alpha$ , почти неизменна, однако область, где обе социальные группы соглашаются на увеличение параметра  $\alpha$ , значительно сокращается. Из этого следует, что область, где социальные интересы групп расходятся, начинает существенно увеличиваться с 2007 г., что свидетельствует о некоторых проблемах в экономике КНР в период мирового финансово-экономического кризиса. Ещё более характерным является тот факт, что динамика изменения этого интегрального показателя ведёт себя в США и Китае противоположным образом: если для экономики США характерно в целом снижение показателя, особенно в годы обострения кризиса, то для экономики КНР мы видим рост показателя – размер площади несогласованности интересов социальных групп увеличивается и продолжает расти.

Рассмотрим динамику макроэкономических показателей экономики России по той же методике за период с 2000 по 2010 г. Как и для экономики КНР, наибольшая область несовпадения интересов работников и капиталистов соответствует 2010 г., когда наблюдалось наибольшее значение параметра  $p = -2,5521$ . А в 2004 г. (когда параметр  $p$  имел наименьшее значение  $-1,552$ ) область несовпадения интересов  $\Omega_p^{\downarrow\uparrow}$  наименьшая (рис. 6).

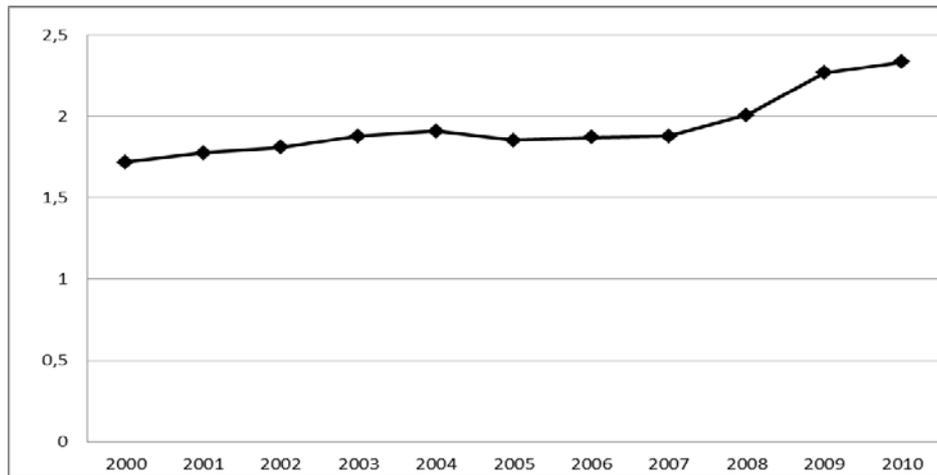


Рис. 5. Изменение области несовпадения интересов социальных групп КНР

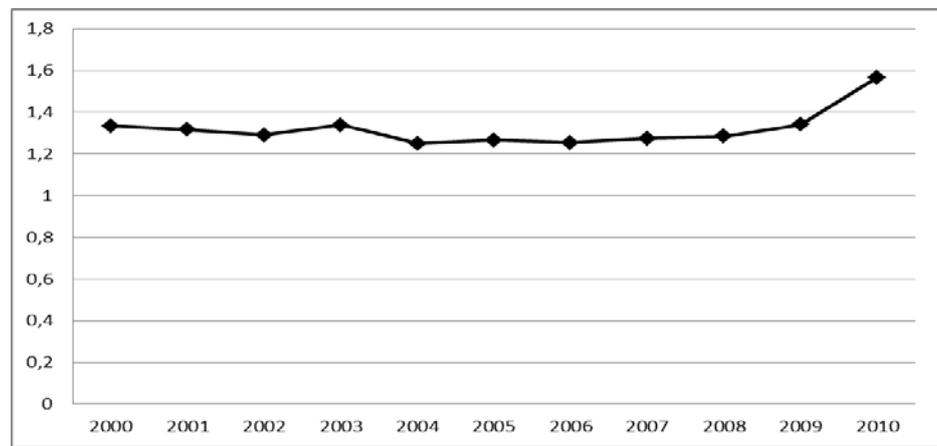


Рис. 6. Изменение области несовпадения интересов социальных групп России

Для экономики Ирана также построим график изменения области несовпадения интересов социальных групп (рис. 7). Из полученного графика можно сделать вывод, что изменение площади несогласованности интересов для экономики Ирана имеет существенные отличия как от динамики соответствующей величины в США, так и КНР и России, но качественно ближе к Японии. При этом

по величине оценки площади ситуация в иранской экономике ближе к российской и существенно отличается (показатель меньше) от ситуации в КНР. Отличие от двух предыдущих случаев состоит и в том, что по мере выхода из кризиса площадь несогласованности интересов в Иране начинает уменьшаться.

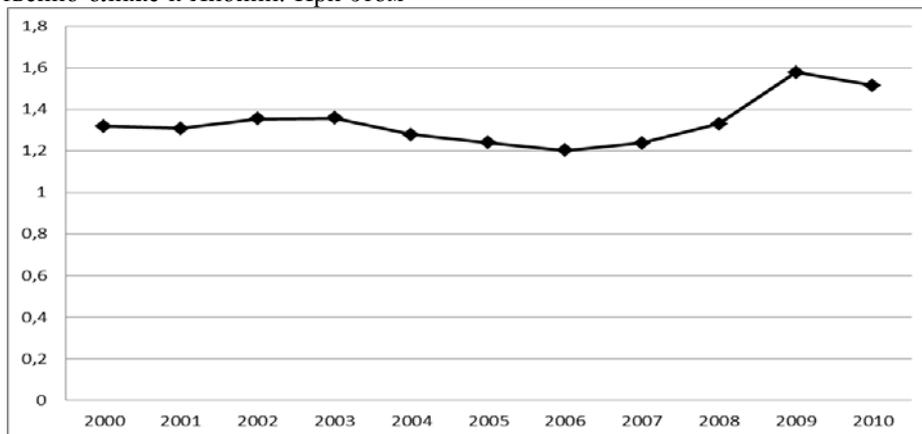


Рис. 7. Изменение области несовпадения интересов социальных групп для экономики Ирана

#### 4. Заключение

Расчеты, проведенные по данной модели, позволяют сделать предварительный вывод, что модель дает возможность идентифицировать кризис и показывает реакцию экономики той или

иной страны на кризисные явления в экономике в контексте взаимодействия социальных групп. Ещё более важной нам представляется возможность модели учитывать опосредованно, через статистику, влияние институтов на формирование

взаимодействия социальных групп, в частности при выборе параметра производственной функции. В определенной степени полученные результаты отражают тенденции развития, в том числе крупнейших экономик мира – США и КНР. В США уже достаточно эффективно действуют меры социального регулирования, что служит оптимистическим прогнозом выхода из глобального кризиса. В КНР формирование институтов и инструментов регулирования только зарождается и, возможно, перспективы развития экономики не столь оптимистичны, каковыми они представляются в настоящее время.

С помощью этой модели можно проследить траекторию гипотетической развивающейся страны. При низкой капиталовооруженности страна может находиться на границе области  $\Omega^*$ , затем, по мере роста капиталовооруженности, она вступает в зону социального конфликта, где распределение дохода между социальными группами зависит от их переговорной силы и других институтов. Во многих случаях можно ожидать, что доля труда возрастет. При дальнейшем повышении капиталовооруженности страна вступает в область  $\Omega^*$ , где обе группы соглашаются на повышение доли капитала – в частности, работники часто сами становятся держателями ценных бумаг. Именно этот фактор, по-видимому, является определяющим в динамике области взаимодействия для экономики США.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания по научным исследованиям высших учебных заведений № 2014/66, код проекта 1281, тема: «Новые информационные технологии в анализе данных и моделировании развивающихся экономических и экологических процессов на основе высокопроизводительных вычислений в кластерных системах».

Авторы выражают благодарность студентам группы МИЭ-41 ВятГУ за помощь в проведении расчетов при идентификации модели.

#### Список литературы

1. Максимов В.Д., Чадов Ф.Л. Краевые задачи экономической динамики с приближенным выполнением краевых условий. Конструктивное исследование // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2012. Вып. 3(14). С. 12–17.
2. Матвеев В.Д. О возможности изменения типа производственной функции: интересы социальных групп и направление технического прогресса // Информационные технологии и вычислительные системы. 2007. № 4. С. 28–37.
3. Матвеев В.Д., Гуревич Л.М. Модели эндогенного роста, их применение, развитие, перспективы // Экономические исследования: Теория и приложения / Европейский университет в С-Петербурге. СПб, 2000. С. 260–295.

4. Матвеев В.Д., Шатров А.В. Экономический рост в развивающихся странах: моделирование взаимодействия социальных групп // Int. Conf. GSOM Emerging Markets Conference: Business and Government Perspectives, October 16–17, St. Petersburg: St. Petersburg University. 2014. P. 841–850.

5. Мировая экономика. URL: [www.ereport.ru/articles/wececonomy/japan.htm](http://www.ereport.ru/articles/wececonomy/japan.htm) (дата обращения: 20.01.2014).

6. Оленев Н.Н. Параллельные вычисления в математическом моделировании региональной экономики // Параллельные вычислительные технологии: тр. II междунар. науч. конф. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. Т.1. С.140–151.

7. Перский Ю.К., Шульц Д.Н. Развитие представлений об иерархическом устройстве экономики в истории экономической мысли // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2013. Вып. 4(19). С. 13–19.

8. Пильник Н.П., Поспелов И.Г. Описание целей деятельности фирмы в динамической модели общего равновесия. М.: Фазис - ВЦ РАН, 2009. 76 с.

9. Поспелов И.Г. Моделирование экономических структур. М.: Фазис - ВЦ РАН, 2003. 191 с.

10. Симонов П.М. Об одном методе исследования динамических моделей экономики // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2014. Вып.1(20). С.14–27.

11. Симонов П.М., Шульц Д.Н., Шульц П.Н. Эволюция экономического равновесия // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2012. Вып.3 (14). С.32–38.

12. Global Finance. URL: [www.globfin.ru/stat/statoc.htm](http://www.globfin.ru/stat/statoc.htm) (дата обращения: 20.01.2014).

13. Matveenko V. Interests of social groups, direction of technical progress, and barriers to development: How sustainable is the World economic growth? // Progress in Economics Research (Nova Science Publishers). 2010. Vol. 20. P. 129–162.

14. Pro Finance Service. URL: [www.forex.ru/news/2012/02/20](http://www.forex.ru/news/2012/02/20) (дата обращения: 19.09.2013).

15. Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70. P. 65–94.

16. United Nations Statistics Division - National Accounts Main Aggregates Database. URL: <http://unstats.un.org/unsd/snaama/dnllist.asp> (дата обращения: 22.07.2014).

Получено: 02.02.2015

#### References

1. Maksimov V.P., Chadov A.L. Kraevye zadachi ekonomicheskoy dinamiki s priblizhyonnym vypolnieniem kraevykh uslovij. Konstruktivnoe issledovanie [Boundary value problems in economic dynamics with approximate fulfilment of boundary

conditions. Constructive study]. *Perm University Herald. Economy*, 2012, no 3(14), pp.12–17.

2. Matveenko V. D. O vozmozhnosti izmeneniya tipa proizvodstvennoj funktsii: interesy sotsial'nyh grupp i napravlenie tekhnicheskogo progressa [About possibility of change type production function: interests of social groups and direction of technical progress]. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy* [Information technologies and computing systems], 2007, no 4., pp. 28–37.

3. Matveenko V.D., Gurevich L.M. Modeli endogenogo rosta, ikh primenenie, razvitie, perspektivy [Models of endogenous growth, their application, development, prospects]. *Ekonomicheskie issledovaniya: Teoriya i prilozheniya* [Economic researches: Theory and appendices]. Sankt Peterburg, Evropeiskij universitet v Sankt Peterburge. 2000. pp. 260–295.

4. Matveenko V.D., Shatrov A.V. Jekonomicheskij rost v razvivajushhihsja stranah: modelirovanie vzaimodejstvija social'nyh grupp [Economic growth in developing countries: modeling of interaction for social groups]. *Int. Conf. GSOM Emerging Markets Conference: Business and Government Perspectives, October 16-17*. St. Petersburg: St. Petersburg University. 2014. pp. 841–850.

5. *Mirovaya ekonomika* [World economy]. Available at: [www.ereport.ru/articles/wececonomy/japan.htm](http://www.ereport.ru/articles/wececonomy/japan.htm) (accessed 20.01.2014).

6. Olenev N.N. Parallel'nye vychisleniya v matematicheskom modelirovanii regional'noj ekonomiki [Parallel calculations in mathematical modeling of regional economy]. Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii [Parallel computing technologies]. *Trudy II mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii. Chelyabinsk: Izdatel'stvo Yuzhno-Ural'skogo Universiteta* [Works of the second international scientific and practical conference. Chelyabinsk]. Vol.1. pp. 140–151.

7. Perskij Yu.K., Shults D.H. Razvitie predstavlenij ob ierarhicheskom ustrojstve ekonomiki v istorii ekonomicheskoy mysli [The development of

concepts about hierarchical structure of economy in the history of economic sciences]. *Perm University Herald. Economy*, 2013, no 4(19), pp.13–19.

8. Pil'nik N.P., Pospelov I.G. *Opisanie tselej deyatel'nosti firmy v dinamicheskoy modeli obshchego ravnovesiya* [Description of the purposes of activity of firm in dynamic model of the general balance]. Moscow: Fazis-VTs RAN, 2009. 76 p.

9. Pospelov I.G. *Modelirovanie ekonomicheskikh struktur* [Modeling of economic structures]. Moscow: Fazis-VTs RAN, 2003. 191 p.

10. Simonov P.M. Ob odnom metode issledovaniya dinamicheskikh modelej ekonomiki [About one method of research of dynamic models of economy]. *Perm University Herald. Economy*, 2014, no 1(20), pp.14–27.

11. Simonov P.M., Shults D.N., Shults P.N. Evolutsiya teorii obshchego ravnovesiya [Evolution of economic balance]. *Perm University Herald. Economy*, 2012, no 3(14), pp.32–38.

12. *Global Finance* [Electronic resource]. GlobFin.ru [Official site]. Available at: [www.globfin.ru/stat/statoc.htm](http://www.globfin.ru/stat/statoc.htm) (accessed 20.01.2014).

13. Matveenko V. Interests of social groups, direction of technical progress, and barriers to development: How sustainable is the World economic growth? *Progress in Economics Research (Nova Science Publishers)*, 2010, Vol. 20, pp. 129–162.

14. Pro Finance Service [Electronic resource]. Available at: [www.forex.ru/news/2012/02/20](http://www.forex.ru/news/2012/02/20) (accessed 19.09.2013).

15. Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*. 1956. Vol. 70, pp. 65–94.

16. *United Nations Statistics Division - National Accounts Main Aggregates Database*. Available at: <http://unstats.un.org/unsd/snaama/dnllist.asp> (accessed 22.07.2014).

*The date of the manuscript receipt:*  
02.02.2015

---

**MODELING ECONOMIC GROWTH OF DIFFERENT COUNTRIES BY MEANS OF PRODUCTION FUNCTIONS ON THE BASIS OF COMPARATIVE ANALYSIS OF DYNAMICS OF INTERACTION OF SOCIAL GROUPS**

*Vladimir D. Matveenko, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Economics*

E-mail: [vmatveenko@hse.ru](mailto:vmatveenko@hse.ru)

**National Research University Higher School of Economics (St. Petersburg); 55/2, Sedova st., St. Petersburg, 193171, Russia**

*Nicolas N. Olenev, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher*

E-mail: [nolenev@ccas.ru](mailto:nolenev@ccas.ru)

**Dorodnicyn Computing Center of RAS; 40, Vavilova st., Moscow, 119333, Russia**

*Anatoly V. Shatrov, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Modeling in Economics*

E-mail: [avshatrov1@yandex.ru](mailto:avshatrov1@yandex.ru)

**Vyatka State University; 36, Moskovskaya st., Kirov, 610000, Russia**

Basing on the theory of endogenous growth, we provide a possible explanation of differences in the development of national economies of the world and their reaction to the global economic crises. Earlier an approach to

modeling of the choice of technologies in various countries was proposed (Matveenko, 2007, 2010). Technological progress is modeled as a change of parameter  $\alpha$  of the Cobb-Douglas production function  $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$  or of the CES production function  $Y = A(\alpha K^p + (1-\alpha)L^p)^{1/p}$ . The parameter  $\alpha$  has both technological and institutional meaning for the economy, in particular, for the Cobb-Douglas function it is the capital share. Recently, a big difference in capital share in different countries and in different times has been found empirically by several authors. The choice of the parameter naturally depends on the interests of the social groups: the workers and the capital owners; each group agrees to a change of the parameter  $\alpha$  if it leads to income increase for this group. Thus, it is possible to identify the areas of coincidence and non-coincidence of interests of the social groups on the plane  $\alpha$ -k, where k is the capital-to-labor ratio. Using the UNSTATS statistical data, we build the graphs of parametric dependencies  $\alpha$ -k for the economies of the USA, Japan, Russia, China and Iran for the period of 2000 – 2010. The graphs clearly identify the sub-period of the crises by changes in the area of coincidence/non-coincidence of interests. A specific behavior of the integral characteristic for the area of non-coincidence of interests of the social groups in Russia and China is noted, which differs radically from the situation in the USA.

*Key words: modeling, economic growth, production function, dynamics of interaction of social groups.*

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

*Матвеевко В.Д., Оленев Н.Н., Шатров А.В.* Моделирование экономического роста различных стран с помощью производственных функций на основе сравнительного анализа динамики взаимодействия социальных групп // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2015. № 2(25). С. 31–41.