РАЗДЕЛ I. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.929 + 330.4

ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФУКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ

В.П. Максимов, д. ф.-м. наук, проф. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Электронный адрес: maksimov@econ.psu.ru
А.Л. Чадов, соискатель кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Электронный адрес: alchadov@yandex.ru
Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Динамические модели, рассматриваемые в этой работе, охватывают широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом эффектов последействия (запаздывания) и содержат одновременно как уравнения, описывающие динамику показателей в непрерывном времени на конечном промежутке, так и уравнения с дискретным временем, характерным для эконометрических моделей. Для таких моделей рассматриваются задачи управления, в которых цель управления задается конечной совокупностью линейных функционалов, число которых, вообще говоря, не связано с размерностью системы. Дается описание множества управлений, решающих задачу управления в классе управлений, генерируемых подсистемой с дискретным временем.

Ключевые слова: модели экономической динамики; функционально-дифференциальные уравнения; непрерывно-дискретные системы; задачи управления.

Введение

Исследованию задач управления для систем дифференциальных уравнений и их обобщений посвящена обширная литература [см., напр.: 3,5,15,16,20 а также библиографию в них]. Здесь мы рассматриваем задачи управления для линейных систем функционально-дифферен-циальных уравнений, сдержащих как уравнения с непрерывным временем, так и уравнения с дискретным временем. Упомянутые системы часто называют гибридными, используя термин, применяемый в литературе в различных смыслах [см.: 12,15,19,20]. Чтобы избежать искажения смысла названия, мы используем термин «непрерывно-дискретные системы», подчеркивая разную природу независимой переменной в различных уравнениях системы. Кроме того, для краткости будем использовать термины «непрерывный» и «дискретный» применительно к соответствующим подсистемам. Для случая, когда непрерывная подсистема представляет собой линейную дифференциальную систему с постоянными запаздываниями в непрерывном аргументе, задачи управления с задаваемыми в качестве цели терминальными состояниями в различных постановках исследуются в работах [15,16,20]. Подчеркнем, что мы используем здесь в качестве непрерывной подсистемы общий случай линейной функционально-дифференциальной системы, разрешенной относительно производной [6,10]. Основной математический результат работы состоит в описании множества управлений, решающих задачу управления в классе управлений, генерируемых подсистемой с дискретным временем (теорема), он опубликован без доказательства в кратком сообщении [13].

1. Предварительные сведения

Для описания непрерывной подсистемы введем линейный оператор $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int_0^t K(t,s)\dot{x}(s)ds + A(t)x(0),\ t \in [0,T].$$

Здесь элементы $k_{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}$ и таковы, что на этом множестве

$$|k_{ij}(t,s)| \le \kappa(t), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

где функция κ суммируема на $[0,T]$, элементы $n \times n$-матрицы A суммируемы на $[0,T]$. Обозначим через $AC^n[0,T]$ пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0;T] \to R^n$, $L^n[0,T]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $z:[0,T] \to R^n$,

$$\|x\|_{AC^n} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L^n}, \quad \|z\|_{L^n} = \int_0^T |z(t)|dt,$$

где $|\alpha| = \max_{i=1,\dots,n} |\alpha_i|$ для $\alpha = col(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R^n$.

Оператор $\mathcal{L}: AC^n[0;T] \to L^n[0;T]$ ограничен. Систематическое изложение теории уравнения $\mathcal{L}x = f$ дается в монографиях [1,17]. Функционально-дифференциальная система $\mathcal{L}x = f$ охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. Пространство всех решений однородной системы $\mathcal{L}x = 0$ имеет размерность n. Пусть $\{x_1,\dots,x_n\}$ – базис в этом пространстве. Матрица $X = (x_1,\dots,x_n)$ называется фундаментальной матрицей (для определенности будем считать, что $X(0) = E,$ – единичная $n \times n$-матрица). Задача Коши

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha$$

однозначно разрешима при любых $f \in L^n[0,T]$ и $\alpha \in R^n$ и ее решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)\alpha + \int_0^t C_1(t,s) f(s)\,ds,$$

где $C_1(t,s)$ – матрица Коши [1,6,17]. Напомним, что всякий линейный ограниченный вектор-функционал $l: AC^n[0,T] \to R^N$
имеет представление

$$lx = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds,$$

где элементы $N \times n$-матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном на $[0,T]$, Ψ – постоянная $N \times n$-матрица. Условия $lx = \gamma$, которые мы будем использовать для задания цели управления, охватывают многочисленные классы конкретных краевых условий, встречающиеся в приложениях, в том числе двух- и многоточечные, интегральные, нагруженные интегральные и др.

Для описания дискретной подсистемы введем оператор Λ:

$$(\Lambda y)(t_i) = y(t_i) - \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j), \qquad (2)$$

$$i = 1,2,\dots,\mu, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\mu = T.$$

Здесь B_{ij} - постоянные $\nu \times \nu$-матрицы. Обозначим $J = \{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$, $FD^\nu(\mu)$ – пространство функций $y: J \to R^\nu$ с нормой $\|y\|_{FD^\nu(\mu)} = \sum_{i=0}^{\mu} |y(t_i)|$. Напомним некоторые факты об уравнении $\Lambda y = g$ [4]. Задача Коши

$$\Lambda y = g, \quad y(0) = \beta$$

однозначно разрешима при любых $g \in FD^\nu(\mu)$ и $\beta \in R^\nu$ и ее решение представимо в виде

$$y(t_i) = Y(t_i)\beta + \sum_{j \le i} C_2(i,j) g(t_j), \; i = 1,2,\dots,\mu,$$

где $Y(\cdot)$ – фундаментальная матрица, $C_2(\cdot,\cdot)$ – матрица Коши.

2. Задача управления. Построение дискретного управления

Рассмотрим систему управления

$$(\mathcal{L}x)(t) = \sum_{j: t_j < t} U_j(t) y(t_j) + f(t), \; t \in [0,T], \qquad (3)$$

$$(\Lambda y)(t_i) = \sum_{j: t_j < t} A_{ij} x(t_j) + \sum_{j: t_j < t} H_{ij} v(t_j) + g(t_i), \qquad (4)$$

$i = 1,2,\dots,\mu$, содержащую подсистему (3) с непрерывным временем и подсистему (4) с дискретным временем. Здесь A_{ij}, H_{ij} – постоянные матрицы размерности $\nu \times n$ и $\nu \times m$ соответственно, U_j – $\nu \times n$-матрицы с суммируемыми элементами. Эти подсистемы связаны между собой по состояниям, управление v входит только в дискретную подсистему, определяя поведение ее траекторий в зависимости от сечений $x(t_j)$ траекторий непрерывной подсистемы и воздействуя на нее с помощью компонент $y(t_j)$. Начальные состояния подсистем считаются заданными: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Цель управления задается с помощью целевого вектор-функционала $\lambda: AC^n[0,T] \times FD^\nu(\mu) \to R^N$:

$$\lambda(x,y) = \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds + \Psi x(0) + \sum_{j=0}^{\mu} G_j y(t_j) = \gamma \in R^N.$$

Для формулировки основной теоремы введем необходимые обозначения. Определим $\nu \times n$-матрицы D_{kj} и M_{ij} равенствами

$$D_{kj} = \int_{t_j}^{t_k} C_1(t_k, s) U_j(s)ds, \quad M_{ij} = \sum_{j<k<i} A_{ik} D_{kj}.$$

Обозначим через Λ_3 дискретную операцию

$$(\Lambda_3 y)(t_i) = (\Lambda y)(t_i) - \sum_{j<i} M_{ij} y(t_j),$$

а через $Y_3(\cdot)$ и $C_3(\cdot,\cdot)$ ее фундаментальную матрицу и матрицу Коши соответственно. Пусть, далее,

$$P_{i0} = \sum_{j\le i} C_3(i,j) \sum_{k<j} A_{jk} X(t_k); \; Q_{i0} = Y_3(t_i);$$

$$S_{ij} = C_3(i,j); \; W_{ij} = \sum_{j<k\le i} C_3(i,k) H_{kj};$$

$$R_i(s) = \sum_{j\le i} \chi_{[0,t_j]}(s) [\sum_{j<k\le i} C_3(i,k) A_{kj}] C_1(t_j,s),$$

$\chi_{[0,t_j]}(s)$ – характеристическая функция отрезка $[0,t_j]$; $\quad \Theta(s) = \Phi(s) + \int_s^T \Phi(\tau)[C_1(\tau,s)]'_\tau \, d\tau;$

$$D_j^1 = \int_{t_j}^T \Theta(s) U_j(s)\, ds, \; j = 0,\dots,\mu-1, \; D_\mu^1 = 0;$$

$$\Delta_j = D_j^1 + G_j; P_0^\lambda = \int_0^T \Phi(s) \dot{X}(s)\, ds + \Psi + \sum_{j=0}^{\mu} \Delta_j P_{j0};$$

$$Q_0^\lambda = \sum_{j=0}^{\mu} \Delta_j Q_{j0}; R^\lambda(s) = \Theta(s) + \sum_{j=0}^{\mu} \chi_{[0,t_j]}(s) \Delta_j R_j(s);$$

$$S_j^\lambda = \sum_{j\le k} \Delta_k S_{kj}; \quad W_j^\lambda = \sum_{j<k<\mu} \Delta_k W_{kj};$$

$$\delta = \gamma - P_0^\lambda x_0 - Q_0^\lambda y_0 - \int_0^T R^\lambda(s) f(s)\, ds - \sum_{j=0}^{\mu} S_j^\lambda g(t_j).$$

Теорема. *Множество управлений*

$$v = col(v(t_0),\dots,v(t_{\mu-1})),$$

решающих задачу управления (3)-(5), *исчерпывается решениями системы* $Wv = \delta$, *где* $W = (W_0^\lambda,\dots,W_{\mu-1}^\lambda)$.

Доказательство. Воспользуемся представлением решения системы (3):

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t C_1(t,s) f(s)\, ds + \int_0^t C_1(t,s) \sum_{j:s_j<s} U_j(s) y(s_j)\, ds, \quad t\in[0,T]. \tag{6}$$

Отсюда для каждого сечения $x(t_j)$ имеем

$$x(t_j) = X(t_j)x_0 + \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) f(s)\, ds + \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k)\, ds.$$

После подстановки правой части этого равенства в систему (4) получаем систему относительно y:

$$y(t_i) = \sum_{j:t_j<t_i} A_{ij} \Big(X(t_j)x_0 + \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) f(s)\, ds + \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k)\, ds \Big) + \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j) + \sum_{j:t_j<t_i} H_{ij} v(t_j) + g(t_i). \tag{7}$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые в правой части:

$$y(t_i) = \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j) + \sum_{j:t_j<t_i} A_{ij} \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) f(s)\, ds + \sum_{j:t_j<t_i} A_{ij} X(t_j) x_0 + \sum_{j:t_j<t_i} A_{ij} \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k) ds + \sum_{j:t_j<t_i} H_{ij} v(t_j) + g(t_i).$$

Покажем, что выражение

$$\int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k) ds$$

можно записать в виде

$$\sum_{k<j} D_{jk} y(t_k).$$

Действительно,

$$\int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k) ds = \int_0^{t_1} C_1(t_j,0) U_0(s) y(s_0) ds + \int_{t_1}^{t_2} C_1(t_j,s)[U_0(s)y(s_0) + U_1(s)y(s_1)] ds + \dots + \int_{t_{j-1}}^{t_j} C_1(t_j,s)[U_0(s)y(s_0) + \dots + U_{j-1}(s) y(s_{j-1})] ds =$$

$$+ \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) U_0(s)\, ds\, y(t_0) + \int_{t_1}^{t_j} C_1(t_j,s) U_1(s)\, ds\, y(t_1) + \dots + \int_{t_{j-1}}^{t_j} C_1(t_j,s) U_{j-1}(s)\, ds\, y(t_{j-1})$$

и остается положить

$$D_{jk} = \int_{t_k}^{t_j} C_1(t_j,s) U_k(s)\, ds.$$

Определим дискретную операцию Λ_3 равенством

$$(\Lambda_3 y)(t_i) = y(t_i) - \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j) - \sum_{j<i} A_{ij} \sum_{k<j} D_{jk} y(t_k).$$

Меняя порядок суммирования в повторной сумме, получим для Λ_3 эквивалентное представление

$$(\Lambda_3 y)(t_i) = y(t_i) - \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j) - \sum_{j<i} M_{ij} y(t_j),$$

где

$$M_{ij} = \sum_{j<k<i} A_{ik} D_{kj}.$$

Используя фундаментальную матрицу $Y_3(\cdot)$ и матрицу Коши $C_3(\cdot,\cdot)$ операции Λ_3, запишем решение системы (7) в виде

$$y(t_i) = Y_3(t_i)y_0 + \sum_{j\le i} C_3(i,j)\Big(\sum_{k<j} A_{jk}\ [X(t_k)x_0 +$$

$$+\int_0^{t_k} C_1(t_k,s)f(s)\,ds] + \sum_{k<j} H_{jk}v(t_k) + g(t_i)\ \Big).$$

Раскрывая скобки и меняя порядок суммирования в повторных суммах, придадим этому представлению следующий вид:

$$y(t_i) = \Big(\sum_{j\le i} C_3(i,j)\sum_{k<j} A_{jk}\ X(t_k)\ \Big)x_0 + Y_3(t_i)y_0 +$$

$$+\int_0^{t_k}\Big(\sum_{j\le i}\chi_{[0,t_j]}(s)[\sum_{j\le k<i} C_3(i,k)A_{kj}]C_1(t_j,s)\ \Big)f(s)\,ds +$$

$$+\sum_{j\le i} C_3(i,j)g(t_j) + \sum_{j\le i}\sum_{j<k\le i} C_3(i,k)H_{kj}v(t_j).$$

Для сокращения дальнейших преобразований введем следующие обозначения:

$$P_{i0} = \sum_{j\le i} C_3(i,j)\sum_{k<j} A_{jk}X(t_k);\ Q_{i0} = Y_3(t_i);$$

$$R_i(s) = \sum_{j\le i}\chi_{[0,t_j]}(s)[\sum_{j<k\le i} C_3(i,k)A_{kj}]C_1(t_j,s),$$

$$S_{ij} = C_3(i,j);\ W_{ij} = \sum_{j<k\le i} C_3(i,k)H_{kj}.$$

С использованием этих обозначений представление для $y(t_j)$ принимает окончательный вид:

$$y(t_j) = P_{i0}x_0 + Q_{i0}y_0 + \int_0^{t_i} R_i(s)f(s)\,ds +$$

$$+\sum_{j\le i} S_{ij}g(t_j) + \sum_{j<i} W_{ij}v(t_j). \qquad (8)$$

Теперь можно воспользоваться представлениями (6) и (8) для вычисления значений целевого вектор-функционала λ на траекториях системы (3)–(4). Этот вектор-функционал содержит производную $\dot{x}$, для нахождения которой продифференцируем по t обе части равенства (6). При этом мы используем следующее свойство матрицы Коши $C(\cdot,\cdot)$ [6]:

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_0^t C_1(t,s)f(s)\,ds\Big) = \int_0^t\ [C_1(t,s)]'_t f(s)\,ds + f(t).$$

Таким образом получаем

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t)x_0 + \int_0^t [C_1(t,s)]'_t f(s)\,ds +$$

$$\int_0^t [C_1(t,s)]'_t \sum_{j:s_j<s} U_j(s)y(s_j)\,ds + f(t) + \sum_{j:t_j<t} U_j(t)y(t_j).$$

Подстановка правой части этого равенства и правой части равенства (8) в выражение для целевого вектор-функционала (5) приводит к равенству

$$\lambda(x,y) = [\int_0^T \Phi(s)\dot{X}(s)\,ds + \Psi]x_0 + \int_0^T \Theta(s)f(s)\,ds +$$

$$+\int_0^T \Theta(s)\sum_{j:s_j<s} U_j(s)y(s_j)\,ds + \sum_{j=0}^{\mu} G_j y(t_j), \quad (9)$$

где

$$\Theta(s) = \int_s^T \Phi(\tau)[C_1(\tau,s)]'_\tau\,d\tau + \Phi(s).$$

Третьему слагаемому в правой части (9) придадим вид $\sum_0^\mu D_j^1 y(t_j)$, вводя обозначение $D_j^1 = \int_{t_j}^T \Theta(s)U_j(s)\,ds,\ j = 0,\dots,\mu-1$ и полагая $D_\mu^1 = 0$. Наконец, обозначая $\Delta_j = D_j^1 + G_j$, получаем окончательное выражение для $\lambda(x,y)$ через x_0, f и $y(t_j)$:

$$\lambda(x,y) = [\int_0^T \Phi(s)\dot{X}(s)\,ds + \Psi]x_0 +$$

$$+\int_0^T \Theta(s)f(s)\,ds + \sum_{j=0}^{\mu}\Delta_j y(t_j).$$

Отсюда, вводя обозначения

$$\Delta_j = D_j^1 + G_j; P_0^\lambda = \int_0^T \Phi(s)\dot{X}(s)\,ds + \Psi + \sum_{j=0}^{\mu}\Delta_j P_{j0};$$

$$Q_0^\lambda = \sum_{j=0}^{\mu}\Delta_j Q_{j0}; R^\lambda(s) = \Theta(s) + \sum_{j=0}^{\mu}\chi_{[0,t_j]}(s)\Delta_j R_j(s);$$

$$S_J^\lambda = \sum_{j\le k}\Delta_k S_{kj};\quad W_j^\lambda = \sum_{j<k<\mu}\Delta_k W_{kj};$$

$$\delta = \gamma - P_0^\lambda x_0 - Q_0^\lambda y_0 - \int_0^T R^\lambda(s)f(s)\,ds - \sum_{j=0}^{\mu} S_j^\lambda g(t_j),$$

получаем значение целевого вектор-функционала λ из (5) на траекториях системы (3) – (4):

$$\lambda(x,y) = P_0^\lambda x_0 + Q_0^\lambda y_0 + \int_0^T R^\lambda(s)f(s)\,ds +$$

$$\sum_{j=0}^{\mu} S_j^\lambda g(t_j) + \sum_{j=0}^{\mu-1} W_j^\lambda v(t_j).$$

Таким образом, заданное значение γ достигается целевым вектор-функционалом только под действием управления v, которое является решением системы $Wv = \delta$.

Эффективное исследование разрешимости задачи (3)-(5) с использованием доказанной теоремы может быть проведено на основе доказательного вычислительного эксперимента, основные этапы и алгоритмы которого описаны в [7,11]. Рассматриваемые здесь динамические модели расширяют возможности применения идей и результатов работ [2,8,9,14,18].

Приведем иллюстрирующий пример.

Пример. Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}_1(t) - 0.3x_2(t-1) = 0, \quad t \in [0.4],$$

$$\dot{x}_2(t) + 0.1x_2(t) = \sum_{j=0}^{3}(t-t_j)\chi_{[t_j,4]}(t)y_2(t_j),$$

$t_j = j,\ j = 0,1,2,3,4,$

$$\begin{pmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{pmatrix} = \sum_{j<i} B_{ij}\begin{pmatrix} y_1(t_j) \\ y_2(t_j) \end{pmatrix} + \sum_{j<i}\begin{pmatrix} 0 \\ v(t_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t_i) \\ f_2(t_i) \end{pmatrix},$$

$i = 1,2,3,4,$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 5,\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1$$

и заданными терминальными состояниями компонент непрерывной подсистемы:

$$x_1(4) = 10,\ x_2(4) = 100.$$

Матрицы B_{ij} заданы равенствами

$$B_{10} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix},\ B_{21} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.08 \\ -0.075 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$B_{20} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.05 \\ -0.05 & 0.2 \end{pmatrix}, B_{32} = \begin{pmatrix} 0.35 & -0.05 \\ -0.05 & 0.15 \end{pmatrix},$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.04 \\ -0.04 & 0.1 \end{pmatrix}, B_{30} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.03 \\ -0.03 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$B_{43} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.01 \\ -0.01 & 0.3 \end{pmatrix}, B_{42} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.01 \\ -0.01 & 0.2 \end{pmatrix},$$

$$B_{41} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.01 \\ -0.01 & 0.1 \end{pmatrix}, B_{40} = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.01 \\ -0.01 & 0. \end{pmatrix};$$

$$f(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix},\ f(t_2) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.1 \end{pmatrix},$$

$$f(t_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix},\ f(t_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что дискретная подсистема не является автономной (коэффициенты зависят от дискретного времени) и обладает полной памятью. Непрерывная подсистема может рассматриваться как модель двухотраслевой экономики, средства для развития первой отрасли поступают с запаздыванием как средства от реализации продукции второй отрасли, для которой задана динамика производственных фондов с коэффициентом амортизации 0.1 и которая развивается в соответствии с инвестициями, поступающими от дискретного исполнительного механизма, описываемого уравнениями дискретной подсистемы. Управляющие воздействия $v(0), v(1), v(2)$ входят только во второе уравнение дискретной подсистемы.

Матрица Коши $C_1(t,s)$ непрерывной подсистемы имеет элементы

$$C_1^{11}(t,s) = 1, \quad C_1^{12}(t,s) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad t \in [0,1],\ 0 \le s \le t; \\ 0,\ t \in (1,4],\ t-1 < s \le t; \\ 3(1-e^{-0.1(t-1-s)}),\ t \in (1,4],\ 0 \le s \le t-1; \end{cases}$$

$$C_1^{21}(t,s) = 0,\ C_1^{22}(t,s) = e^{-0.1(t-s)}.$$

Фундаментальная матрица $X(t)$ непрерывной подсистемы имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & \begin{cases} 0, & t \in [0,1], \\ 3(1-e^{-0.1(t-1)}), & t \in (1,4] \end{cases} \\ 0 & e^{-0.1t} \end{pmatrix}.$$

Матрица $C_2(i,j)$ дискретной подсистемы определяется равенствами

$$C_2(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2(2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2(2,1) = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.08 \\ -0.075 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$C_2(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2(3,2) = \begin{pmatrix} 0.35 & -0.05 \\ -0.05 & 0.15 \end{pmatrix},$$

$$C_2(3,1) = \begin{pmatrix} 0.47875 & -0.0830 \\ -0.07625 & 0.1490 \end{pmatrix},$$

$$C_2(4,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2(4,3) = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.01 \\ -0.01 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$C_2(4,2) = \begin{pmatrix} 0.4405 & -0.0315 \\ -0.0285 & 0.2455 \end{pmatrix},$$

$$C_2(4,1) = \begin{pmatrix} 0.5430125 & -0.071690 \\ -0.0576625 & 0.206330 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица $Y(\cdot)$ дискретной подсистемы определяется равенствами

$$Y(t_1) = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, Y(t_2) = \begin{pmatrix} 0.658 & -0.124 \\ -0.1175 & 0.2975 \end{pmatrix},$$

$$Y(t_3) = \begin{pmatrix} 0.590175 & -0.130275 \\ -0.110525 & 0.184825 \end{pmatrix},$$

$$Y(t_4) = \begin{pmatrix} 0.63675025 & -0.12713325 \\ -0.094139251175 & 0.14849025 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в приведенных численных значениях элементов матриц C_2 и Y все цифры верные.

Все управления $v(0), v(1), v(2)$, решающие поставленную задачу управления, определяются системой

$0.39540648\,v(0)+.0487746v(1) = 10 - 5.307495399,$

$4.715822191v(0)+1.945636580v(1) +$

$+ 0.48374180v(2)=100 -12.59389468.$

Эта система имеет однопараметрическое семейство решений:

$v(1) = 23.05174954 - 0.3546687920\,v(2),$

$v(0) = 9.024042139 + 0.04374948145\,v(2).$

Оставшаяся степень свободы может быть использована для достижения некоторой дополнительной цели. Например, если целесообразно воспользоваться управлением с минимальной в данном классе нормой, скажем, суммой абсолютных величин всех компонент, то, решая задачу

$$[|\,v(0)\,|+|\,v(1)\,|+|\,v(2)\,|] \to \min,$$

получаем управление

$v(0) = 9.024042139,\ v(1) = 23.05174954,\ v(2) = 0,$

дающее минимальную величину общих расходов на управление, не превосходящую 32.08 ед.

Список литературы

1. *Азбелев Н.В.,* Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.

2. *Азбелев Н.В.,* Максимов В.П., Симонов П.М. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. № 1. С. 3-23.

3. *Андреева Е.А.,* Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 312 с.

4. *Андрианов Д.Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 3-16.

5. *Габасов Р.,* Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Оптимизация динамических систем в классе дискретных управлений конечной степени // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 12. С. 3-30.

6. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13, №4. С. 601-606.

7. *Максимов В.П.* Арифметика рациональных чисел и компьютерное исследование интегральных уравнений // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 3. С. 121-126.

8. *Максимов В.П.* Об одном подходе к задаче наведения системы в окрестность нормативной траектории // Вестник Пермского университета. Экономика. 2008. № 8. С. 108-112.

9. *Максимов В.П.* Импульсная коррекция управления для динамических моделей с последействием // Вестник Пермского университета. Экономика. 2009. № 1. С. 91- 95.

10. *Максимов В.П.,* Рахматуллина Л.Ф. О представлении решений линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 6. С. 1026- 1036.

11. *Максимов В.П.,* Румянцев А.Н. Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 56-71.

12. *Максимов В.П.,* Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Экономика. 2011. № 2. С. 13-23.

13. *Максимов В.П.,* Чадов А.Л. Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 9. С. 72-76.

14. *Максимов В.П.,* Поносов Д.А., Чадов А.Л. Некоторые задачи экономико-математического моделирования // Вестник Пермского университета. Экономика. 2010. № 2. С. 45-50.

15. *Марченко В.А.,* Зачкевич З. Представление решений управляемых гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 12. С. 1775-1786.

16. *Agranovich G. A.* Observability criteria of linear discrete-continuous systems //Functional Differential Equations. 2009. V. 16, № 1. P. 35-51.

17. *Azbelev N.V.,* Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.

18. *Azbelev N.V.,* Maksimov V.P., Simonov P.M. Theory of functional differential equations and applications // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2011. V. 69, No. 2. P. 203-235.

19. *Chadov A.L.,* Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. 2012. V. 19, №1-2.P. 49-62.

20. *De la Sen M.* On the controller synthesis for linear hybrid systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2001. V. 18. P. 503-529.

Discrete control of functional differential continuous-discrete system

V.P. Maksimov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics
E-mail: maksimov@econ.psu.ru
A.L. Chadov, Applicant, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics
E-mail: alchadov@yandex.ru
Perm State University, 614990, Perm, Bukireva str.,15

Dynamic models under consideration cover a wide class of models in mathematical Economics and Ecology taking into account some aftereffects and including equations with both continuous and discrete times. Control problems are considered in a general case when the aimes of control are given by a system of linear functionals with an arbitrary number of functionals. Complete description of all control actions that solve the control problem is given for the case when only discrete control is applied.

Keywords: economic dynamic models, control problems, hybrid systems.