

УДК 330.43:338(470+571)
ББК 65в31+65.9(2Рос)

АГРЕГИРОВАННАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ С УЧЕТОМ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА ДЛЯ ЭКОНОМИКИ РОССИИ*

М.И. Гребнев, аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике

Электронный адрес: grebnevm@prognoz.ru

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614030, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Рассматривается проблема агрегирования производственных функций как моделей производственных процессов на региональном и национальном уровнях экономики России. Проблема агрегирования была впервые сформулирована в 40-е гг. XX в. на страницах журнала *Econometrica*, однако остается нерешенной до сих пор. Данная задача является частной в рамках более широкого направления исследований, связанного с изучением «мостов» между микро- и макроэкономикой. Развивается статистический метод агрегирования производственных функций, предложенный пермской школой иерархического анализа экономики. Цель работы состоит в адаптации данного метода агрегирования для экономики России. Предлагается модификация метода для случая неравномерности распределения ресурсов между элементами экономики. В работе представлены оценки параметров «инвестиционной» производственной функции Кобба – Дугласа для всех регионов России. На основе региональных производственных функций осуществлен синтез агрегированной производственной функции для экономики России. При построении агрегированной производственной функции учитывается фактор научно-технического прогресса. Оценки параметров агрегированной производственной функции для экономики России получены на базе программного комплекса «ПРОГНОЗ. СБСП СЭР». Установлено, что выведенная производственная функция обеспечивает более точные прогнозы по сравнению с традиционной макроэкономической производственной функцией Кобба – Дугласа. На основании агрегированной производственной функции получена оценка ВВП России на 2015 г., построен прогноз на 2016–2018 гг. и проведен анализ производственных процессов в экономике России: рассчитаны коэффициенты эластичности по факторам производства, предельная норма замещения и эластичность замещения между факторами производства. Согласно полученному прогнозу в 2015 г. по базовому сценарию в России ожидается спад экономики на 2,6%, в 2016–2018 гг. экономика начнет восстанавливаться, темпы экономического роста составят 2–2,5% в год.

Ключевые слова: производственная функция, статистический метод агрегирования, региональный и национальный уровни экономики.

Публикации Л. Кляйна [10; 11] в журнале *Econometrica* в 1946 г. породили серию статей, касающихся проблемы агрегирования производственных функций. Шу Шан Пу четко сформулировал основную проблему агрегирования производственных функций – необходимо найти такую функцию, в которой совокупный выпуск зависел бы только от совокупных затрат факторов производства, но не от их распределения между фирмами [15]. По мнению Л. Кляйна, агрегированная производственная функция отражает технологические процессы. Другой точки зрения придерживался К. Мэй: агрегированная производственная функция отражает процессы принятия решений [12; 13].

А. Натаф сформулировал условия агрегирования производственных функций [14]: агрегированная производственная функция существует только тогда, когда ПФ является аддитивно-сепарабельной, то есть когда представима в виде $f(k, l) = \phi(k) + \psi(l)$.

Ф. Фишер [9] отметил, что условия А. Натафа очень жесткие. Опираясь на аргументы К. Мэя и интерпретируя производственную функцию как максимально возможный объем производства при заданных затратах ресурсов, он сформулировал собственные условия существования агрегированной производственной функции – одинаковые для всех фирм пропорции выпуска продукции.

* Статья подготовлена в рамках реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, договор №02.G25.31.0039 (постановление Правительства РФ № 218 от 09.04.2010 «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства») при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

В данной работе предложен краткий обзор методов агрегирования производственных функций, более полный обзор представлен в работе [1].

В 2000-х гг. в г. Перми под руководством профессора Ю.К. Перского была создана научная школа иерархического анализа экономики. В 2008 г. Д.Н. Шульцем был предложен статистический метод агрегирования ПФ [6]. Уникальность метода и его практическая значимость была подтверждена членом-корреспондентом РАН Г.Б. Клейнером после представления результатов на семинаре «Проблемы моделирования производственных систем» в Центральном экономико-математическом институте РАН.

Результаты построения агрегированной производственной функции для экономики России на основании отраслевых производственных функций представлены в работе [3].

Теоретические положения и выводы, содержащиеся в работе, вносят вклад в исследование актуальных вопросов теории агрегирования производственных функций.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования результатов исследования органами исполнительной власти РФ для построения агрегированных производственных функций, расчета краткосрочных и среднесрочных прогнозов ВВП России, оценки чувствительности объема ВВП России к изменению объемов факторов производства.

С точки зрения статистического метода агрегирования каждая микроэкономическая производственная функция рассматривается как случайная реализация статистической модели

$$y_i = f(a_i, x), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n$, n – количество элементов в экономической системе, x – объем затраченных ресурсов, a_i – технологические параметры. Они являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами.

Макроэкономическая производственная функция определяется как математическое ожидание данной реализации:

– для случая интенсивных факторов ($x_1 = x_2 = \dots = x_n$):

$$Y \xrightarrow{p} nM[y] = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(a, x)g(a)da = n\tilde{F}(x), \quad (2)$$

где $Y = \sum_{i=1}^n y_i$, $g(a)$ – функция плотности распределения параметра a , $\tilde{F}$ – «средняя» производственная функция;

– для случая экстенсивных факторов ($X = \sum_{i=1}^n x_i$):

$$Y \approx n \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(a, \frac{X}{n}\right)g(a)da = n\tilde{F}\left(\frac{X}{n}\right). \quad (3)$$

Данный функционал предполагает равномерное распределение ресурсов между элементами экономики, в случае высокого уровня неравномерности распределения ресурсов предлагается использовать следующее выражение:

$$Y(X) = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(a, wX)g(a)g(w)dadw, \quad (4)$$

где w – весовые коэффициенты, $x_i = w_i X$; $g(w)$ – функция плотности распределения параметра w .

Для вывода функциональной формы агрегированной производственной функции с учетом научно-технического прогресса (НТП) для экономики России на региональном уровне будем использовать «инвестиционную» производственную функцию Кобба – Дугласа с учетом НТП:

$$y = Ae^{\lambda t} i^{\alpha} l^{\beta}, \quad (5)$$

где y – валовой региональный продукт (ВРП) в ценах 1998 г., млн руб.;

i – инвестиции в основной капитал по региону в ценах 1998 г., млн руб.;

l – фонд оплаты труда по региону в ценах 1998 г., млн руб.;

t – время.

Использовать инвестиции в качестве основного фактора производства для случая переходной экономики России предложил В.А. Бессонов в работе «Анализ динамики российской переходной экономики» [2]. По мнению В.А. Бессонова, «инвестиции являются дефицитным фактором в переходной экономике» и «применительно к ним не существует проблемы выделения эффективно используемой части, в отличие от данных по фондам и труду» [2, с. 50]. Высокую точность аппроксимации «инвестиционной» производственной функцией отмечает И.Г. Поспелов [7, с. 141].

Для оценки параметров линеаризуем производственную функцию Кобба – Дугласа с помощью логарифмического преобразования:

$$\ln(y) = \ln(A) + \lambda t + \alpha \ln(i) + \beta \ln(l). \quad (6)$$

Оценки параметров региональных производственных функций по 83 субъектам РФ представлены в табл. 1. Для получения оценок использовались данные Федеральной службы государственной статистики. Оценки получены с помощью платформы бизнес-аналитики PrognosPlatform7 [5].

Таблица 1

Оценки параметров региональных производственных функций (с учетом НТП)

Субъект РФ	$\ln(A)$	λ	α	β	$\lambda + \alpha + \beta$
Белгородская область	8.11	0.050	0.12	0.11	0.28
Брянская область	7.55	0.024	0.04	0.25	0.31
Владимирская область	7.78	0.015	0.11	0.16	0.29
Воронежская область	8.23	0.022	0.11	0.14	0.27
Ивановская область	7.64	0.012	0.09	0.15	0.25
Калужская область	7.20	0.032	0.16	0.13	0.29
Костромская область	7.43	0.016	0.09	0.18	0.28

Субъект РФ	$\ln(A)$	λ	α	β	$\lambda + \alpha + \beta$
Курская область	7.33	0.021	0.11	0.25	0.38
Липецкая область	7.60	0.011	0.10	0.23	0.34
Московская область	7.81	0.028	0.22	0.17	0.42
Орловская область	6.72	0.004	0.12	0.28	0.41
Рязанская область	7.92	0.020	0.13	0.10	0.23
Смоленская область	6.77	0.019	0.20	0.20	0.42
Тамбовская область	7.74	0.023	0.10	0.14	0.27
Тверская область	8.07	0.020	0.01	0.26	0.29
Тульская область	7.09	0.013	0.13	0.26	0.40
Ярославская область	7.43	0.018	0.11	0.27	0.39
г. Москва	5.34	0.021	0.59	0.10	0.69
Республика Карелия	7.03	0.00	0.18	0.17	0.35
Республика Коми	8.21	0.006	0.09	0.20	0.29
Архангельская область	7.23	0.025	0.12	0.29	0.43
Ненецкий АО	6.65	0.038	0.13	0.43	0.60
Вологодская область	8.21	0.001	0.13	0.15	0.27
Калининградская область	6.84	0.030	0.12	0.23	0.38
Ленинградская область	6.02	0.020	0.18	0.38	0.59
Мурманская область	9.39	0.00	0.00	0.11	0.11
Новгородская область	7.91	0.022	0.08	0.12	0.22
Псковская область	7.53	0.014	0.14	0.07	0.22
г. Санкт-Петербург	8.15	0.034	0.15	0.22	0.41
Республика Адыгея	6.46	0.038	0.16	0.11	0.27
Республика Калмыкия	5.63	0.003	0.23	0.08	0.32
Краснодарский край	8.05	0.022	0.14	0.21	0.37
Астраханская область	6.46	0.012	0.21	0.21	0.43
Волгоградская область	7.41	0.0003	0.20	0.19	0.39
Ростовская область	6.93	0.024	0.23	0.23	0.49
Республика Дагестан	6.30	0.043	0.15	0.29	0.48
Республика Ингушетия	5.76	0.008	0.11	0.16	0.28
Кабардино-Балкарская Республика	7.06	0.029	0.00	0.34	0.37
Карачаево-Черкесская Республика	6.66	0.030	0.05	0.23	0.31
Республика Северная Осетия-Алания	6.62	0.021	0.14	0.17	0.33
Чеченская Республика	4.23	0.00	0.33	0.36	0.70
Ставропольский край	7.79	0.024	0.10	0.25	0.38
Республика Башкортостан	8.77	0.038	0.09	0.18	0.30
Республика Марий Эл	7.41	0.025	0.14	0.05	0.22
Республика Мордовия	6.65	0.020	0.19	0.19	0.40
Республика Татарстан	7.82	0.020	0.20	0.19	0.41
Удмуртская Республика	7.84	0.010	0.11	0.19	0.30
Чувашская Республика	6.65	0.001	0.24	0.15	0.39
Пермский край	7.73	0.019	0.25	0.12	0.39
Кировская область	8.91	0.011	0.07	0.04	0.12
Нижегородская область	8.62	0.018	0.08	0.21	0.31
Оренбургская область	7.46	0.019	0.19	0.17	0.39
Пензенская область	7.82	0.026	0.14	0.07	0.24
Самарская область	7.86	0.001	0.21	0.19	0.40
Саратовская область	7.65	0.025	0.20	0.13	0.36
Ульяновская область	8.19	0.017	0.10	0.12	0.23
Курганская область	7.12	0.009	0.14	0.19	0.34
Свердловская область	7.68	0.019	0.20	0.22	0.44
Тюменская область	8.71	0.020	0.01	0.39	0.42
Ханты-Мансийский АО	10.24	0.028	0.00	0.33	0.35
Ямало-Ненецкий АО	9.70	0.011	0.09	0.15	0.25
Челябинская область	6.84	0.011	0.32	0.13	0.47
Республика Алтай	6.08	0.011	0.15	0.14	0.30
Республика Бурятия	7.71	0.015	0.07	0.19	0.28
Республика Тыва	6.99	0.019	0.005	0.14	0.17
Республика Хакасия	8.58	0.019	0.01	0.06	0.09
Алтайский край	7.27	0.013	0.19	0.18	0.39
Забайкальский край	7.96	0.032	0.12	0.09	0.25
Красноярский край	9.18	0.021	0.06	0.19	0.27
Иркутская область	8.82	0.031	0.14	0.10	0.27
Кемеровская область	8.36	0.007	0.10	0.20	0.31
Новосибирская область	7.58	0.013	0.19	0.20	0.40
Омская область	7.26	0.020	0.25	0.14	0.41

Субъект РФ	$\ln(A)$	λ	α	β	$\lambda + \alpha + \beta$
Томская область	7.85	0.011	0.03	0.31	0.35
Республика Саха (Якутия)	8.97	0.018	0.08	0.12	0.21
Камчатский край	8.84	0.014	0.02	0.05	0.08
Приморский край	8.57	0.017	0.12	0.12	0.25
Хабаровский край	7.73	0.005	0.14	0.22	0.36
Амурская область	8.45	0.021	0.10	0.05	0.18
Магаданская область	8.38	0.000	0.00	0.09	0.09
Сахалинская область	6.82	0.050	0.06	0.33	0.44
Еврейская АО	6.09	0.029	0.08	0.18	0.29
Чукотский АО	4.66	0.014	0.14	0.53	0.68

На основании критерия согласия Колмогорова – Смирнова можно сделать вывод о том, что для параметров λ , α , β производственной функции $y = Ae^{\lambda t} i^{\alpha} l^{\beta}$ характерен нормальный закон распределения

(λ : $K-S p-value^1 = 0,57$; α : $K-S p-value = 0,22$; β : $K-S p-value = 0,47$).

При построении агрегированной производственной функции с учетом НТП будем предполагать региональную структуру экономики России однородной на периоде моделирования. Поэтому в качестве весовых коэффициентов (w_i и w_L) будем брать их средние значения на временном периоде

$$\begin{aligned}\bar{w}_I &= \left(\sum_{t=1998}^{2012} w_i[t] \right) / 15; \\ \bar{w}_L &= \left(\sum_{t=1998}^{2012} w_L[t] \right) / 15.\end{aligned}\quad (7)$$

На основании критерия согласия Колмогорова – Смирнова можно сделать вывод о том, что для параметров $\bar{w}_I$ и $\bar{w}_L$ наиболее подходящей является функция логнормального распределения ($\bar{w}_I$: $K-S p-value = 0,98$; $\bar{w}_L$: $K-S p-value = 0,75$):

$$\begin{aligned}\bar{w}_I &\sim \text{LogN}(-0.3661, 1.0644); \\ \bar{w}_L &\sim \text{LogN}(-0.2810, 1.0124).\end{aligned}\quad (8)$$

Таким образом, агрегированная производственная функция с учетом НТП будет иметь следующую функциональную форму:

$$\begin{aligned}Y_{APF_NTP} &= nM[A]e^{M[\lambda]t + \frac{1}{2}\sigma^2[\lambda]t^2}; \\ &* \int \text{LogN}(\mu[\bar{w}_I], \sigma[\bar{w}_I])(\bar{w}_I I)^{M[\alpha] + \frac{1}{2}\sigma^2[\alpha]\ln(\bar{w}_I I)} d\bar{w}_I; \\ &* \int \text{LogN}(\mu[\bar{w}_L], \sigma[\bar{w}_L])(\bar{w}_L L)^{M[\beta] + \frac{1}{2}\sigma^2[\beta]\ln(\bar{w}_L L)} d\bar{w}_L,\end{aligned}\quad (9)$$

где Y_{APF_NTP} – валовой внутренний продукт (ВВП) в ценах 1998 г., млн руб.;

I – инвестиции в основной капитал по России в ценах 1998 г., млн руб.;

L – фонд оплаты труда по России в ценах 1998 г., млн руб.

В качестве оценок параметров $\bar{w}_I$, $\bar{w}_L$ возьмем значения параметров из полученных теоретических функций распределения (8).

Для оценки параметров $M[\lambda]$, $\sigma[\lambda]$, $M[\alpha]$, $\sigma[\alpha]$, $\mu[\beta]$, $\sigma[\beta]$ функции (9) использовался метод наименьших квадратов:

$$\sum_{t=1999}^{2012} \left(\frac{\hat{Y}[t]}{\hat{Y}[t-1]} - \frac{Y[t]}{Y[t-1]} \right)^2 \rightarrow \min. \quad (10)$$

В результате были получены следующие оценки параметров: $n = 79^2$; $M[A] = 3412,47$; $\mu[\bar{w}_I] = -0,3661$; $\sigma[\bar{w}_I] = 1,0644$; $\mu[\bar{w}_L] = -0,2810$; $\sigma[\bar{w}_L] = 1,0124$; $M[\lambda] = 0,0118$; $\sigma[\lambda] = 0,0063$; $M[\alpha] = 0,1985$; $\sigma[\alpha] = 0,0901$; $M[\beta] = 0,0802$; $\sigma[\beta] = 0,0112$. Оценки параметров были получены с помощью программного комплекса «ПРОГНОЗ. СБСП СЭР – система балансировки стратегических прогнозов социально-экономического развития Российской Федерации, ее регионов и отраслей» [4].

Графики агрегированной производственной функции с учетом НТП (при фиксированном значении $t=15$, 2012 г.) и ее линий уровня (изоквант) представлены на рисунках ниже (рис. 1, 2).

Рассчитаем ключевые характеристики для полученной агрегированной производственной функции с учетом НТП:

– Коэффициенты эластичности ВВП по факторам производства:

$$\begin{aligned}\varepsilon(Y, I) &= 0,27; \\ \varepsilon(Y, L) &= 0,08.\end{aligned}\quad (11)$$

Эластичность ВВП по инвестициям показывает, что при изменении объема инвестиций в основной капитал на 1% объем ВВП изменится на 0,27%. Эластичность ВВП по фонду оплаты труда показывает, что при изменении фонда оплаты труда на 1% объем ВВП изменится на 0,08%.

– Предельная норма замещения агрегированной производственной функции:

$$S = \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) / \left(\frac{\partial F}{\partial I} \right) = 2,1. \quad (12)$$

Данное значение предельной нормы замещения S говорит о том, что объем инвестиций в основной капитал I необходимо увеличить на 2,1 млн руб. при уменьшении фонда оплаты труда L на 1 млн руб., чтобы при этом величина ВРП осталось неизменной.

– Эластичность замещения агрегированной производственной функции с учетом НТП:

$$\varepsilon(I, L) = 0,189. \quad (13)$$

¹Вероятность ошибки при отклонении нулевой гипотезы о виде закона распределения параметра (ошибки первого рода) по критерию Колмогорова – Смирнова.

²При построении агрегированной производственной функции не учитывались Ненецкий автономный округ, Ханты-Мансийский автономный округ, Ямало-Ненецкий автономный округ, так как данные регионы входят в состав областей, и Чеченская Республика, по которой отсутствуют статистические данные на период 1998–2004 гг.

Данное значение эластичности замещения говорит о том, что для увеличения предельной нормы замещения S на 1% необходимо увеличить

отношение между инвестициями в основной капитал и фондом оплаты труда (I/L) на 0,189%.

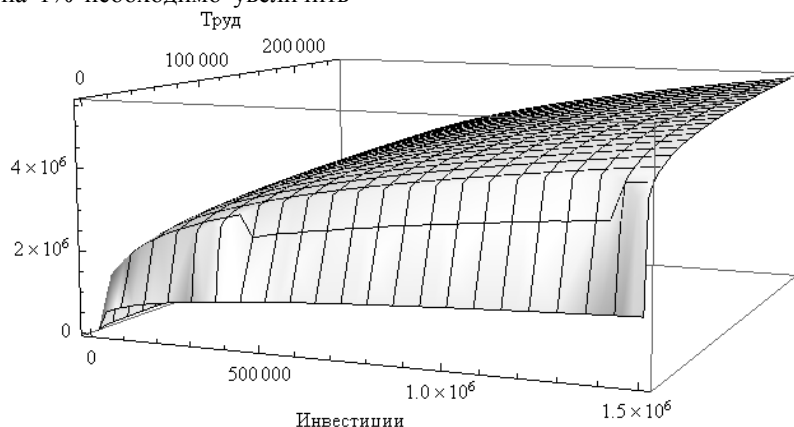


Рис. 1. Агрегированная производственная функция с учетом НТП для экономики России

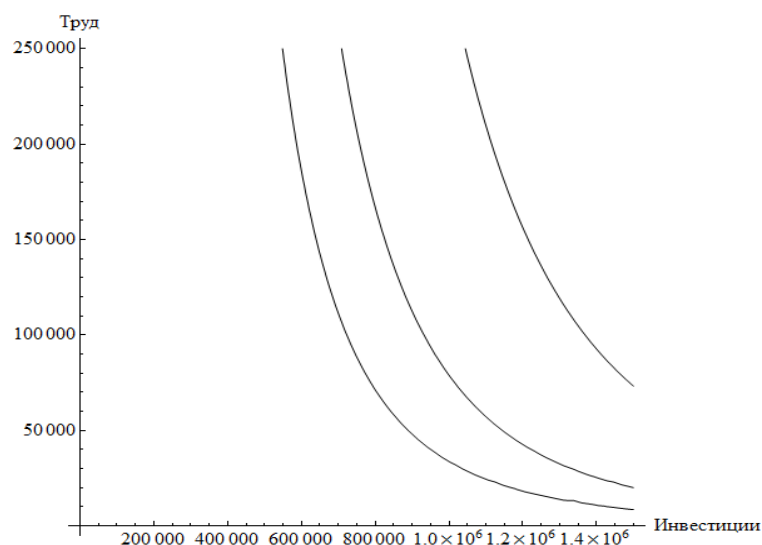


Рис. 2. Изокванты агрегированной производственной функции с учетом НТП для экономики России

График фактической динамики ВВП России и модельной динамики представлен на рис. 3.

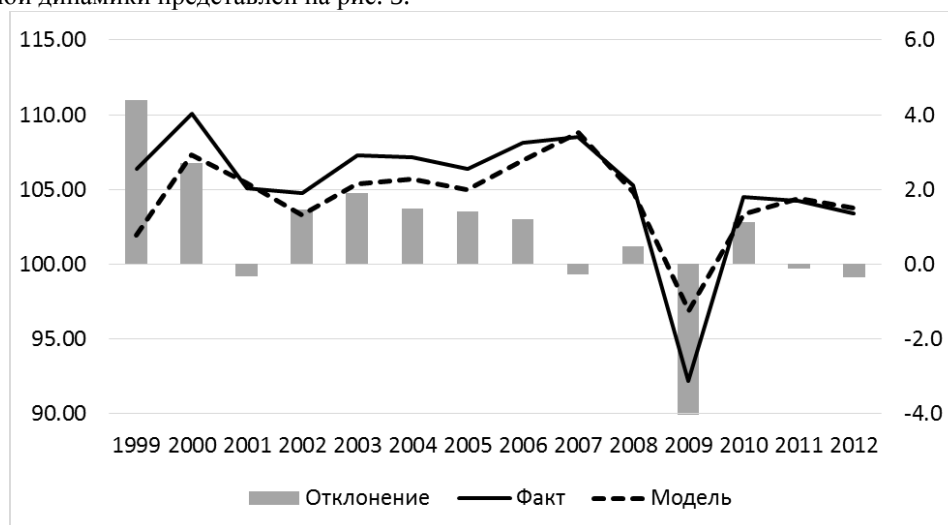


Рис. 3. Модельный (Y_{APF_NTP}) и фактический ряд

Сравним качество агрегированной производственной функции, полученной с помощью статистического метода агрегирования (9), с качеством

регрессионной модели в форме производственной функции Кобба – Дугласа:

$$Y_{CD_NTP} = Ae^{\lambda t} I^{\alpha} L^{\beta} \varepsilon, \quad (14)$$

где ε – случайный член.

Для этого оценим параметры модели (14) в линеаризованной форме:

$$\ln(Y_{CD_NTP}) = \ln(A) + \lambda t + \alpha \ln(I) + \beta \ln(L) + \varepsilon. \quad (15)$$

Так как между факторами имеет место сильная корреляция (табл. 2), для получения оценок использовалась ридж-регрессия. Статистические характеристики и оценки параметров модели (15) представлены в табл. 3.

Таблица 2

Коэффициенты корреляции

Показатель	I	L	t
I	1,00	0,99	0,98
L	0,99	1,00	0,97
t	0,98	0,97	1,00

Таблица 3

Результаты оценивания производственной функции Кобба – Дугласа с учетом НТП для экономики России

Коэффициент регуляризации $ridge = 0,05$.					
Коэффициент детерминации $R^2 = 0,984$.					
Скорректированный коэффициент детерминации $AdjustedR^2 = 0,959$.					
F -статистика $F = 110,69$.					
p -значение $p = 0,00$					
Показатель	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	p-значение	VIF *
$\ln(A)$	9,84	1,05	9,32	0,00	
λ	0,01	0,01	1,34	0,21	3,18
α	0,26	0,10	2,71	0,02	2,46
β	0,15	0,08	1,78	0,10	2,78

* VIF (variance inflation factor) – коэффициент возрастания дисперсии.

Результаты сравнения качества аппроксимации моделей (9) и (14) на основании скорректированного коэффициента детерминации ($Adj R^2$) и

средней ошибки аппроксимации (E_1 и E_2) представлены в табл. 4.

Таблица 4

Сравнение моделей (9) и (14)³

Год	$\frac{Y[t]}{Y[t-1]} * 100$	$\frac{Y_{CD_NTP}[t]}{Y_{CD_NTP}[t-1]} * 100$	$\frac{Y_{APF_NTP}[t]}{Y_{APF_NTP}[t-1]} * 100$
1999	106,4	98,8	102,0
2000	110,0	108,6	107,3
2001	105,1	106,6	105,4
2002	104,7	104,3	103,3
2003	107,3	106,0	105,4
2004	107,2	106,2	105,7
2005	106,4	105,7	105,0
2006	108,2	107,6	107,0
2007	108,5	109,7	108,8
2008	105,2	105,3	104,8
2009	92,2	96,7	96,9
2010	104,5	103,6	103,4
2011	104,3	104,3	104,4
2012	103,4	104,1	103,8
$Adj R^2$		0,52	0,66
$E_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left \frac{Y_i - \hat{Y}_i}{Y_i} \right * 100\%$		1,514	1,507
$E_2 = \frac{1}{\bar{y}} * \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}} * 100\%$		2,39	1,99

³ $Y[t]$ – ВВП в ценах 1998 г. в текущем периоде, млн руб. (факт);

$Y[t-1]$ – ВВП в ценах 1998 г. в предыдущем периоде, млн руб. (факт);

$Y_{CD_NTP}[t]$ – ВВП в ценах 1998 г. в текущем периоде, млн руб. (модель (14));

$Y_{CD_NTP}[t-1]$ – ВВП в ценах 1998 г. в предыдущем периоде, млн руб. (модель (14));

$Y_{APF_NTP}[t]$ – ВВП в ценах 1998 г. в текущем периоде, млн руб. (модель (9));

$Y_{APF_NTP}[t-1]$ – ВВП в ценах 1998 г. в предыдущем периоде, млн руб. (модель (9)).

Средняя ошибка аппроксимации агрегированной производственной функции ниже, чем у регрессионной модели в форме производственной функции Кобба – Дугласа (E_1 ниже на 0,007%, E_2

ниже на 0,4%), а значение скорректированного коэффициента детерминации выше.

Результаты верификации моделей (9) и (14) на временном отрезке 2013–2014 гг. представлены в таблицах ниже (табл. 5, 6).

Таблица 5

Верификация модели (9)		
Показатель	2013 г.	2014 г.
$Y[t]/Y[t-1]$	101,3	100,6
$\hat{Y}_{APF_NTP}[t]/\hat{Y}_{APF_NTP}[t-1]$	101,9	100,6
$(Y[t]/Y[t-1]) - (\hat{Y}_{APF_NTP}[t]/\hat{Y}_{APF_NTP}[t-1])$	-0,6	0,0

Таблица 6

Верификация модели (14)		
Показатель	2013 г.	2014 г.
$Y[t]/Y[t-1]$	101,3	100,6
$\hat{Y}_{CD_NTP}[t]/\hat{Y}_{CD_NTP}[t-1]$	102,1	100,6
$(Y[t]/Y[t-1]) - (\hat{Y}_{CD_NTP}[t]/\hat{Y}_{CD_NTP}[t-1])$	-0,8	0,0

Точность прогноза, полученного с помощью агрегированной производственной функции на 2013 г. выше точности прогноза, полученного с помощью регрессионной модели в форме производственной функции Кобба – Дугласа, на 2014 г.; модели (9) и (14) имеют одинаковую точность прогнозирования.

Результаты верификации и статистические характеристики моделей (9) и (14) свидетельствуют о том, что агрегированная производственная функция с учетом НТП имеет высокую точность, срав-

нимую с точностью регрессионной модели в форме производственной функции Кобба – Дугласа.

Согласно агрегированной производственной функции с учетом НТП по базовому сценарию в 2015 г. ожидается сокращение ВВП России на 2,6%, а начиная с 2016 г. экономический рост восстановится и на периоде 2016–2018 гг. будет составлять 2–2,5% (табл. 7). По оптимистическому сценарию спад ВВП в 2015 г. составит 2%, а на периоде 2016–2018 гг. темпы роста будут находиться в районе 3% (табл. 7).

Таблица 7

Прогноз ВВП России на основании агрегированной производственной функции с учетом НТП					
Показатель	Факт	Оценка	Прогноз		
	2014 г.	2015 г.	2016 г.	2017 г.	2018 г.
ИФО ВВП ($Y[t]/Y[t-1]$)					
Вариант 1	100,6	97,4	102,3	102,2	102,5
Вариант 2		98,0	102,8	102,7	103,0
ВВП, млрд руб.					
Вариант 1	71406.4	74905,2	82834,9	91091,2	99717,5
Вариант 2		75716.5	83985.6	93239.8	103239.7

При построении среднесрочного прогноза ВВП России использовались прогнозы сценарных условий и основных макроэкономических параметров Министерства экономического развития Российской Федерации на 2016 г. и на плановый период 2017 и 2018 гг. в составе двух вариантов – вариант 1 (базовый сценарий) и вариант 2 (оптимистический сценарий) [8].

Список литературы

1. Андрианов Д.Л., Гребнев М.И. Обзор методов агрегирования производственных функций // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. 2015. №1. URL: <http://uecs.ru/uecs-73-732015/item/3307-2015-01-12-13-07-45> (дата обращения: 22.10.2015).
2. Бессонов В.А., Цухло С.В. Анализ динамики российской переходной экономики. М.: Институт экономики переходного периода, 2002. С. 5–89.

3. Гребнев М.И. Построение агрегированной производственной функции для экономики России // European Social Science Journal. 2013. №12 (Т. 1). С. 438–445.

4. Гребнев М.И., Андрианов Д.Л., Шульц Д.Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015619466. ПРОГНОЗ. Система балансировки стратегических прогнозов социально-экономического развития Российской Федерации, ее регионов и отраслей (ПРОГНОЗ. СБСП СЭР РФ). Заявка № 2015616036, дата поступления 30 июня 2015 г., дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 04 сентября 2015 г.

5. Официальный сайт ЗАО «ПРОГНОЗ». URL: <http://www.prognoz.ru/> (дата обращения: 22.10.2015).

6. Перский Ю.К., Шульц Д.Н. Иерархический анализ экономики: методы и модели. Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2008. 225 с.

7. Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А., Шипулина Г.Е. Новые принципы и методы разработки макромоделей экономики и модель современной экономики России. М.: ВЦ РАН, 2006. 239 с.

8. *Сценарные условия, основные параметры прогноза социально-экономического развития Российской Федерации и предельные уровни цен (тарифов) на услуги компаний инфраструктурного сектора на 2016 год и на плановый период 2017 и 2018 гг.* / Министерство экономического развития Российской Федерации. Москва, май, 2015. URL: <http://economy.gov.ru/> (дата обращения: 08.07.2015).

9. Felipe J., Fisher F.M. Aggregation in production functions: What Applied Economists should know // *Metroeconomica*. Vol. 54, №3. 2003. P. 208–262.

10. Klein Lawrence R. Macroeconomics and the theory of rational behavior // *Econometrica*. 1946. Vol. 14, № 2. P. 93–108.

11. Klein Lawrence R. Remarks on the theory of aggregation // *Econometrica*. 1946. Vol. 14, № 4. P. 303–312.

12. May K. The aggregation problem for a one-industry model // *Econometrica*. 1946. Vol. 14, № 4. P. 285–298.

13. May K. Technological change and aggregation // *Econometrica*. 1947. Vol. 15, №1. P. 51–63.

14. Nataf A. Sur la Possibilite de Construction de certains Macromodeles // *Econometrica*. 1950. Vol. 16. P. 232–244.

15. Shou Shan Pu. A Note on Macroeconomics // *Econometrica*. 1946. Vol. 14, №4. P. 299–302.

Получено: 21.10.2015

References

1. Andrianov D.L., Grebnev M.I. Obzor metodov agregirovaniya proizvodstvennyh funktsij [Review of the methods of aggregation of production functions]. *Upravlenie ehkonomicheskimi sistemami: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal* [Management of economic systems: an electronic scientific journal], 2015, no. 1. Available at: <http://uecs.ru/uecs-73-732015/item/3307-2015-01-12-13-07-45> (accessed 22.10.2015).

2. Bessonov V.A., Cuhlo S.V. *Analiz dinamiki rossijskoj perekhodnoj ehkonomiki* [Analysis of the dynamics of the Russian economy in transition]. Moscow, Institut ehkonomiki perekhodnogo perioda Publ., 2002, pp. 5–89.

3. Grebnev M.I. Postroenie agregirovannoj proizvodstvennoj funktsii dlya ehkonomiki Rossii [Construction aggregate production function for the economy of Russia]. *European Social Science Journal*, 2013, Vol. 1, no. 12, pp. 438–445.

4. Grebnev M.I. Svidetelstvo o gosudarstvennoj registratsii programmy dlya EHVM 2015619466 PROGNOZ Sistema balansirovki strategicheskikh prognozov socialno ehkonomicheskogo razvi-

tiya Rossijskoj Federacii ee regionov i otraslej (PROGNOZ SBSP SEHR RF) [Certificate of state registration of the computer №2015619466. PROGNOZ. Balancing system of strategic socio-economic development of the Russian Federation, its regions and sectors]. Andrianov D.L., Grebnev M.I. Shults D.N. Date of receipt of June 30, 2015, date of state registration in the Register of Computer Programs September 4, 2015.

5. *Oficialnyj sayt ZAO PROGNOZ* [The official website of JSC "PROGNOZ"], Available at: <http://www.prognoz.ru/> (accessed.10.2015).

6. Perskij Y.K. . Shults D.N. *Ierarhicheskij analiz ehkonomiki metody i modeli* [Hierarchical analysis of the economy: methods and models]. Ekaterin-burg, Institut ehkonomiki UrO RAN Publ., 2008. 225 p.

7. Pospelov I.G., Pospelova I.I., Hohlov M.A., Shipulina G.E. *Novye principy i metody razrabotki makromodelej ehkonomiki i model sovremennoj ehkonomiki Rossii* [The new principles and methods of development of the economy macro models and model of modern Russian economy]. Moscow, VC RAN Publ., 2006. 239 p.

8. *Scenarnye usloviya osnovnye parametry prognoza socialno ehkonomicheskogo razvitiya Rossijskoj Federacii i predelnye urovni cen tarifov na uslugi kompanij infrastruktornogo sektora na 2016 god i na planovyj period 2017 i 2018* [Scenarios, the basic parameters of the forecast of social and economic development of the Russian Federation and the limits of prices (tariffs) for services companies infrastructure sector for 2016 and the planning period of 2017 and 2018]. Ministry of Economic Development of the Russian Federation, Moscow, May, 2015. Available at: <http://economy.gov.ru/> (accessed: 08.07.2015).

9. Felipe J., Fisher F.M. Aggregation in production functions: What Applied Economists should know. *Metroeconomica*, 2003, Vol. 54, no. 3, pp. 208–262.

10. Klein Lawrence R. Macroeconomics and the theory of rational behavior. *Econometrica*, 1946, Vol. 14, no. 2, pp. 93–108.

11. Klein Lawrence R. Remarks on the theory of aggregation. *Econometrica*, 1946, Vol. 14, no. 4, pp. 303–312.

12. May K. The aggregation problem for a one-industry model. *Econometrica*, 1946, Vol. 14, no. 4, pp. 285–298.

13. May K. Technological change and aggregation. *Econometrica*, 1947, Vol. 15, no. 1, pp. 51–63.

14. Nataf A. Sur la Possibilite de Construction de certains Macromodeles. *Econometrica*, 1950, Vol. 16, pp. 232–244.

15. Shou Shan Pu. A Note on Macroeconomics. *Econometrica*, 1946, Vol. 14, no. 4, pp. 299–302.

The date of the manuscript receipt: 21.10.2015

**THE AGGREGATE PRODUCTION FUNCTION FOR THE RUSSIAN ECONOMY
(WITH PROGRESS IN SCIENCE AND TECHNOLOGY CONSIDERED)**

Mikhail I. Grebnev, Postgraduate Student

E-mail: grebnevm@prognoz.ru

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia

The article discusses the issue of aggregating production functions as models of production processes at the regional and national levels of the Russian economy. The problem of aggregation was first formulated in the 1940s in the academic journal *Econometrica*, but it still remains unsolved. This problem is a part of a broader research area studying «bridges» between micro and macroeconomics. The article develops a statistical method of production functions aggregation, offered by Perm school of hierarchical analysis of economy, and is aimed at adapting this method for the Russian economy. A modification of the method for the case of unequal allocation of resources among the elements of the economy is proposed. Estimates of the parameters of the «investment» Cobb-Douglas production function for all Russia's regions, obtained on the basis of the «PROGNOZ. SBSP SER» software, are presented. The aggregate production function for the Russian economy is constructed on the basis of the regional production functions. Progress in science and technology is taken into account as a factor of the production function. It was found that the resulting production function provides more accurate forecasts compared with the traditional macroeconomic Cobb-Douglas production function. Basing on the aggregate production function, Russia's GDP for 2015 is calculated, forecast for 2016–2018 is made, and production processes are analyzed as follows: elasticity coefficients with respect to production factors, marginal rate of substitution and elasticity of substitution are calculated. According to the baseline scenario of the forecast obtained for Russia, in 2015 economic contraction by 2,6% is expected, in 2016-2018 the economy will start recovering, its growth rate for this period is expected to be 2–2,5% per year.

Keywords: production function, statistical aggregation method, regional and national economy.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Гребнев М.И. Агрегированная производственная функция с учетом научно-технического прогресса для экономики России // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2015. № 4(27). С. 71–79.

Please cite this article in English as:

Grebnev M.I. The aggregate production function for the russian economy (with progress in science and technology considered) // Vestnik Permskogo universiteta. Seria Ekonomika = Perm University Herald. Economy. 2015. № 4(27). P. 71–79.