ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014 ЭКОНОМИКА Вып. 1(20)

УДК 330.101.541

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАКРОЭКОНОМИКИ

П.М. Симонов, д. физ.-мат. наук, проф. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Электронный адрес: simpm@mail.ru
Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Рассмотрены модификации некоторых моделей макроэкономики на основе введения вместо инерционных звеньев первого порядка инерционных звеньев первого порядка с кусочно-постоянными запаздываниями. Изучается устойчивость некоторых модифицированных моделей макроэкономики.

Ключевые слова: динамические модели макроэкономики; инерционное звено с кусочно-постоянным запаздываниям первого порядка; устойчивость модифицированных моделей.

1. Введение

Предложена модификация некоторого класса динамических моделей макроэкономики на основе моделирования переходных процессов в таких моделях решениями линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными запаздываниями.

Как известно, в динамических моделях экономики [4, 9, 12, 14, 21, 23, 25, 28, 44-48] используются инерционные и дискретные запаздывания между входными и выходными процессами. При этом инерционные запаздывания первого порядка определяют бесконечно длящиеся переходные процессы, что не всегда адекватно реальным процессам. Нами предложено моделировать запаздывание между входным и выходным процессом линейным дифференциальным уравнением вида

$$Ty'(t)+y([t/T]T)=x(t),\ \ t\geq 0, \qquad (1)$$

где T – время (лаг) запаздывания (переходного процесса); $[t/T]$ – целая часть числа t/T; $x(t)$ – входной процесс; $y(t)$ – выходной процесс. Ниже для простоты изложения будем считать все функции заданными при $t\geq 0$ и дифференцируемыми столько раз, сколько это необходимо для вывода моделей. В случае $x(t)=1$ и $y(0)=0$ решение уравнения (1) имеет вид $y(t)=t/T$ при $0\leq t\leq T$ и $y(t)=1$ при $t>T$. Таким образом, переход из состояния 0 в состояние 1 происходит по линейной зависимости за время T.

Подобные зависимости для моделей микроэкономики опубликованы в работах [32, 33, 36, 37, 40, 41] (первые статьи относительно моделей макроэкономики: [32, 34, 35-40]). В статье [29] сделан вывод, что принципиальная проблема противоречивости микро- и макроэкономической теории в современной науке не преодолена окончательно.

Далее для простоты изложения будем считать все функции заданными при $t\geq 0$. Кроме специально оговоренных случаев, полагаем, что функции дифференцируемы столько раз, сколько это необходимо для вывода моделей.

2. Модификация известных моделей

2.1. *Простейшая линейная модель динамики чистого внутреннего продукта (ЧВП) с учетом запаздывания ввода индуцированных инвестиций* [4, гл.3, 3.2, с.73-75; 3.3, с.75-79; гл.8, 8.1, с.225; 13, гл.2, 2.1, с.42-46; 14, гл.2, § 1, с.42-46; 21, гл.13, 13.3, с.327-331; 25, гл.XIII, § 1, с.414-419; 28, гл.2, § 2.1, с.21-22, гл.4, § 4.4, с.92-93; 44, гл.10, 1, A, с.270-271; 45, гл.14, 14.1.1, с.491-497; 46, гл.2, 2.1, с.34-36; 48, ч.V, гл.18, 18.1, с.556-557].

Модифицированная модель ЧВП может быть записана в виде уравнения

$$\tau Y''(t) + Y'([t/\tau]\tau) - \rho Y(t) = -\rho C(t),$$

где $Y(t)$ – интенсивность воспроизводства ЧВП в момент времени t; $C(t)$ – интенсивность конечного непроизводственного потребления в момент времени t; τ – лаг запаздывания ввода реальных индуцированных инвестиций; $\rho = 1/B$ – технологический индекс роста (темп прироста); B – мощность, коэффициент акселератора, капиталоемкость ЧВП. В этой модели за основу берется макроэкономическое тождество $Y(t) = I(t) + C(t)$, где $I(t)$ – интенсивность ввода реальных индуцированных инвестиций в момент времени t, причем в соответствии с моделью [14, гл.2, § 1, с.55-59] величина инвестиций определяется будущим приростом ЧВП, т.е. имеет место зависимость типа акселератора с лагом $\tau : I(t) = BY'(t+\tau)$. Последнее равенство заменяем равенством $I(t) = B\ Y'([t/\tau]\tau) + Y''(t)$.

2.2. *Нелинейная модель Филлипса – Гудвина динамики ЧВП* [4, гл.3, 3.4, с.79-81, 3.5, с.81-83, гл.7, 7.1-7.3, с.191-199, гл.8, 8.2, с.226-230; 9, гл.II, § 3, с.100-105; 12, гл.3, 3.1-3.5, с.40-63; 18, 8.3, с.237; 21, гл.13, 13.3, с.330-331; 23, гл.5, § 3, с.146-162; 30, гл.4, 1, с.76-94; 47, гл.3, 3-3, с.66]

Модифицированный вариант модели А. Филлипса и Р.М. Гудвина в обозначениях нашей статьи принимает вид

$$TY'(t) + Y([t/T]T) = cY(t) + I(t) + A(t),$$
$$\tau I'(t) + I([t/\tau]\tau) = \Phi(Y'(t)) + \eta(t),$$

где T – лаг запаздывания воспроизводства ЧВП; τ – лаг запаздывания ввода реальных индуцированных инвестиций; c – предельная склонность к потреблению; $A(t) = C_a(t) + I_a(t) + E_x(t) + G_v(t)$ – сумма интенсивностей автономного потребления, автономных инвестиций чистого экспорта и государственных закупок в момент времени t; $\Phi(\cdot)$ – функция нелинейного акселератора индуцированных инвестиций; $\eta(\cdot)$ – неконтролируемое возмущение. В этой модели за основу берется макроэкономическое тождество $Y_D(t) = C(t) + I(t) + E_x(t) + G_v(t)$, где $Y_D(t)$ – интенсивность спроса на ЧВП в момент времени t; $C(t) = cY(t)$ – интенсивность индуцированного потребления в момент времени t. Кроме того, предполагается, что интенсивность запланированных индуцированных инвестиций $J(t)$ в каждый момент времени t определяется через нелинейный акселератор $J(t) = \Phi(Y'(t)) + \eta(t)$. Дифференциальные уравнения модели возникают в результате запаздывания воспроизводства ЧВП $Y(t)$ с лагом T по отношению к спросу на ЧВП $Y_D(t)$, а также в результате запаздывания ввода реальных индуцированных инвестиций $I(t)$ по отношению к запланированным индуцированным инвестициям $J(t)$. Свойства функции $\Phi(\cdot)$ можно найти в работе [4, гл.7, 7.3, с.196-199; 30, гл.4, 1.2, с.79-83].

2.3. *Линейная односекторная модель динамики валового внутреннего продукта* (*ВВП*) [9, гл.II, § 3, с.94-99; 28, гл.3, § 3.3, с.60-61].

Модифицированная модель динамики ВВП имеет вид

$$\tau_V V'(t) + V([t/\tau_V]\tau_V) = J(t) + A(t) + \eta_1(t),$$
$$K'(t) + \mu_K K(t) = V(t) + \eta_2(t),$$
$$T_X X'(t) + X([t/T_X]T_X) = vK(t) + \eta_3(t),$$
$$\tau_J J'(t) + J([t/\tau_J]\tau_J) = aX(t) + \eta_4(t).$$

Здесь $K(t)$ – уровень основных производственных фондов (ОПФ, производственного капитала) в момент времени t; $V(t)$ – интенсивность ввода реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; $J(t)$ – интенсивность выделения запланированных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; $X(t)$ – интенсивность воспроизводства ВВП в момент времени t; $A(t)$ – интенсивность автономных инвестиций в момент времени t; τ_V – лаг запаздывания ввода реальных инвестиций; μ_K – норма амортизации ОПФ, T_X – лаг запаздывания воспроизводства ВВП; τ_J – лаг принятия решения о выделении инвестиций, v – капиталоотдача; a – норматив инвестиций в ОПФ; $\eta_k(\cdot)$, $k = \overline{1,4}$ – неконтролируемые возмущения. Заметим, что в этой модели отдельные запаздывания могут быть инерционного или дискретного типа.

2.4. *Ранняя модель Калецкого динамики ВВП и ОПФ с учетом амортизации* [4, гл.7, 7.4-7.5, с.199-205; 21, гл.13, 13.3, с.327; 23, гл.5, § 3, с.146-162; 47, гл.3, 3-3, с.66]

Модифицированная модель М. Калецкого имеет вид

$$K'(t) + \mu K(t) = V(t) + \eta_1(t),$$
$$\tau V'(t) + V([t/\tau]\tau) = aV(t) - bK(t) + aA(t) + \eta_2(t),$$

где в основном приняты обозначения примера 3. Кроме того, $0 \le a \le 1$ и $b \ge 0$ – параметры модели. Для вывода уравнений модели были использованы тождества $X(t) = C(t) + V(t) + A(t)$, где $C(t) = cX(t)$ – интенсивность индуцированного потребления в момент времени t; $A(t) = C_a(t) + I_a(t) + E_x(t) + G_v(t)$ – сумма интенсивностей автономного потребления, автономных инвестиций, чистого экспорта и государственных закупок в момент времени t;

$J(t) = asX(t) - bK(t) + \eta_2(t)$, где c – предельная склонность к потреблению (предельная норма непроизводственного потребления) относительно ВВП; $s = 1 - c$ – предельная склонность к сбережению (инвестированию) (предельная норма производственного накопления) относительно ВВП; $J(t)$ – интенсивность выделения запланированных индуцированных ВВП и ОПФ валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; $V(t)$ – интенсивность ввода реальных индуцированных ВВП валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t, причем справедливо равенство

$$\tau V'(t) + V([t/\tau]\tau) = J(t).$$

2.5. *Неоклассическая нелинейная односекторная модель Рамсея – Солоу – Свена (РСС) динамики ВВП с учетом запаздывания ввода инвестиций* [5, Ч.III, гл.2, § 1, 1, с.241-246; 6, л.8, 8.2, с.313-322; 7, § 1, с.69-75; 8, 1.1, с.22-23, 3.4, с.186-198, 3.4.4.А-3.4.4.Б, с.199-202; 12, гл.4, 4.1, с.65-70; 13, гл.2, 2.2, с.46-48; 14, гл.2, § 4, с.86-95; 18, 3.1, с.39-41; 19, § 1, с.51, § 4, с.72-82; 20, гл.16, 16.1, с.470-477; 21, гл.10, 10.2, с.247-248; 22, гл.4, 4.1, с.105-112, 4.2, с.112-116; 25, гл.XIII, § 3, с.442-451; 26, гл.V, § 1, с.156-168; 28, гл.3, § 3.4, с.62-71, § 3.5, с.71-74, гл.6, § 6.2, с.142-144; 43, л.4, 4.5, с.133-138; 44, гл.12, 1, Б, с.339-343, В, с.343-347, гл.13, 1-4, с.372-394; 45, гл.14, 14.1.2, с.422-531; 48, Ч.V, 18.1, с.560-566].

Модифицированная модель РСС в абсолютных показателях имеет вид

$$K'(t) + \mu K(t) = V(t) + \bar{\eta}_1(t),$$

$$\tau V'(t) + V([t/\tau]\tau) = sF(K(t), L(t)) + \bar{\eta}_2(t),$$

где $L(t) = L(0)e^{\rho t}$ – уровень трудовых ресурсов в момент времени t; μ – норма амортизации ОПФ; $V(t)$ – интенсивность ввода реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; τ – лаг ввода реальных валовых инвестиций; $F(K,L)$ – неоклассическая линейно однородная производственная функция (ПФ), $X(t) = F(K(t), L(t))$; s – предельная склонность к сбережению (инвестированию) по отношению к ВВП; $\bar{\eta}_1(\cdot)$, $\bar{\eta}_2(\cdot)$ – неконтролируемые возмущения. Перепишем модель РСС в относительных удельных показателях: $k(t) = K(t)/L(t)$ – капиталовооруженность (фондовооруженность); $v(t) = V(t)/L(t)$ – подушевые, удельные инвестиции; $f(k(t)) = F(k(t),1) = F(K(t), L(t))/L(t)$ – производительность труда. Выразим $K'(t) = k'(t)L(t) + k(t)L'(t)$, $V'(t) = v'(t)L(t) + v(t)L'(t)$, подставим в исходные уравнения, разделим оба уравнения на $L(t)$. Получим

$$k'(t) + (\mu + \rho)k(t) = v(t) + \eta_1(t),$$

$$\tau v'(t) + \tau\rho v(t) + V([t/\tau]\tau)/L(t) = sf(k(t)) + \eta_2(t).$$

Далее вычислим

$$V([t/\tau]\tau)/L(t) = v([t/\tau]\tau)\exp(-\rho\tau\{t/\tau\}),$$

где $\{t/\tau\}$ – дробная часть числа t/τ.

Модифицированная модель РСС динамики ВВП с учетом запаздывания ввода инвестиций в относительных, удельных показателях имеет вид

$$k'(t) + (\mu + \rho)k(t) = v(t) + \eta_1(t),$$

$$\tau v'(t) + \rho\tau v(t) + \exp(-\rho\tau\{t/\tau\})v([t/\tau]\tau) = sf(k(t)) + \eta_2(t).$$

Заметим, что в модели запаздывание ввода инвестиций может быть либо инерционным, либо дискретным. В случае дискретного переменного запаздывания с лагом $\tau(t)$ модель примет вид

$$k'(t) + (\mu + \rho)k(t) = sf(k(t - \tau(t)))\exp(-\rho\tau(t)) + \eta_1(t).$$

2.6. *Неоклассическая нелинейная односекторная модель РСС динамики ВВП с акселератором и с учетом запаздывания ввода инвестиций* [27].

Модифицированная модель РСС в абсолютных показателях имеет вид

$$K'(t) + \mu K(t) = V(t) + \bar{\eta}_1(t),$$

$$\tau V'(t) + V([t/\tau]\tau) =$$

$$\tau V'(t) + V([t/\tau]\tau) = X(t) - BX'(t) - C(t) - A(t) - \bar{\eta}_2(t),$$

где к обозначениям примера 2.5 дополнительно введено: $C(t)$ – интенсивность конечного непроизводственного потребления в момент времени t; B – мощность (коэффициент) акселератора ВВП; $A(t) = C_a(t) + I_a(t) + E_x(t) + G_v(t)$ – сумма интенсивностей автономного потребления, автономных инвестиций, чистого экспорта и государственных закупок в момент времени t; $F(K,L)$ – неоклассическая линейно однородная непрерывно дифференцируемая ПФ воспроизводства ВВП, $X(t) = F(K(t), L(t))$. В этой модели за основу взято макроэкономическое равенство $X(t) = I(t) + J(t) + C(t) + A(t) + \bar{\eta}_2(t)$, где $I(t) = BX'(t)$ – интенсивность ввода реальных индуцированных (приростом ВВП) инвестиций в момент времени t (зависимость типа акселератора); $J(t)$ – интенсивность выделения запланированных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; $\bar{\eta}_1(\cdot)$, $\bar{\eta}_2(\cdot)$ – неконтролируемые возмущения.

Аналогично примеру 2.5 перепишем модель РСС в относительных показателях. Воспользуемся равенствами

$$X'(t) = \frac{\partial F}{\partial K}(K(t), L(t))K'(t) + \frac{\partial F}{\partial L}(K(t), L(t))L'(t) = f'(k(t))K'(t) + (f(k(t)) - k(t)f'(k(t)))L'(t),$$

так как в [5, ч.III, § 2, с.219] показано, что $\partial F/\partial K = f'(k)$, $\partial F/\partial L = f(k) - kf'(k)$. Отсюда получим, что $X'(t)/L(t) = f'(k(t))(k'(t) + \rho k(t)) + (f(k(t)) - k(t)f'(k(t))\rho$.

Итак, в относительных показателях модель имеет вид

$$k'(t) + (\mu + \rho)k(t) = v(t) + \eta_1(t),$$
$$\tau v'(t) + Bf'(k(t))k'(t) + \tau\rho v(t) +$$
$$+ \exp(-\rho\tau\{t/\tau\})v([t/\tau]\tau) =$$
$$= (1 - B\rho)f(k(t)) - c(t) - a(t) - \eta_2(t).$$

2.7. *Неоклассическая нелинейная двухсекторная модель с запаздыванием ввода инвестиций* [5, ч.III, §1, 2, с.246-250; 8, 3.4.4.В, с.202-204; 12, гл.4, 4.2, с.70-75; 13, гл.2, 2.2, с.54-56; 20, гл.16, 16.3, с.491-504; 28, гл.2, § 2.6, с.48-49]

Модификация этой модели в абсолютных показателях имеет вид

$$K_1'(t) + \mu_1 K(t) = V_1(t) + \overline{\eta}_1(t),$$
$$\tau_1 V_1'(t) + V_1([t/\tau_1]\tau_1) = sF_1(K_1(t), L_1(t)) + \overline{\eta}_2(t),$$
$$K_2'(t) + \mu_2 K_2(t) = V_2(t) + \overline{\eta}_3(t),$$
$$\tau_2 V_2'(t) + V_2([t/\tau_2]\tau_2) =$$
$$= (1-s)F_1(K_1(t), L_1(t)) + \overline{\eta}_4(t),$$
$$C(t) = F_2(K_2(t), L_2(t)),$$
$$L_1(t) = qL(t),\ L_2(t) = (1-q)L(t),\ L(t) = L(0)e^{\rho t}.$$

Здесь $X_1(t) = F_1(K_1(t), L_1(t))$ и $X_2(t) = F_2(K_2(t), L_2(t))$ – интенсивности валовых выпусков двух секторов некоторой экономики в момент времени *t*; $F_1(K_1, L_1)$ и $F_2(K_2, L_2)$ – неоклассические линейно однородные ПФ этих секторов; μ_1 и μ_2 – нормы амортизации ОПФ этих секторов; $K_1(t)$ и $L_1(t)$ – уровни ОПФ и трудовых ресурсов первого сектора в момент времени *t*; $K_2(t)$ и $L_2(t)$ – уровни ОПФ и трудовых ресурсов второго сектора в момент времени *t*; $V_1(t)$ и $V_2(t)$ – интенсивности ввода реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени *t*; τ_1 и τ_2 – лаги запаздываний ввода реальных валовых инвестиций; $0 \le s$, $q \le 1$ – доли (нормативы) распределения инвестиций и трудовых ресурсов по секторам; *C*(*t*) – интенсивность конечного непроизводственного потребления в момент времени *t*.

Далее, обозначив $k_1(t) = K_1(t)/L_1(t)$, $k_2(t) = K_2(t)/L_2(t)$, $v_1(t) = V_1(t)/K_1(t)$, $v_2(t) = V_2(t)/K_2(t)$, $f_1(k_1(t)) = F_1(k_1(t), 1)$, $f_2(k_2(t)) = F_2(k_2(t), 1)$,

из первых четырех уравнений модели получаем систему

$$k_1'(t) + (\mu_1 + \rho)k_1(t) = v_1(t) + \eta_1(t),$$
$$\tau_1 v_1'(t) + \rho\tau_1 v_1(t) + \exp(-\rho\tau_1\{t/\tau_1\})v_1([t/\tau_1]\tau_1)$$
$$= sf_1(k_1(t)) + \eta_1(t),$$
$$k_2'(t) + (\mu_2 + \rho)k_2(t) = v_2(t) + \eta_2(t),$$
$$\tau_2 v_2'(t) + \rho\tau_2 v_2(t) + \exp(-\rho\tau_2\{t/\tau_2\})v_2([t/\tau_2]\tau_2)$$
$$= (1-s)f_1(k_1(t)) + \eta_4(t).$$

Аналогично могут быть рассмотрены и записаны некоторые трехсекторные модели (см., например, [8, 3.4.4.Г, с.204-209; 22, 4.4, с.121-126; 28, гл.2, § 2.6, с.48-49]).

2.8. *Неоклассическая нелинейная модель Занга динамики ВВП с учетом запаздывания ввода инвестиций в ОПФ и запаздывания образования человеческого капитала* [18, 4.4, с.94-101]

Модифицированная модель В.-Б. Занга в абсолютных показателях имеет вид

$$K'(t) + \mu_K K(t) = V(t) + \overline{\eta}_1(t),$$
$$\tau_V V'(t) + V([t/\tau_V]\tau_V) = sX(t) + A(t) + \overline{\eta}_2(t),$$
$$Q'(t) + \mu_Q Q(t) =$$
$$= \kappa X(t) + H(c_1 X(t)/L(t), L_1(t), Q(t)) + \overline{\eta}_3(t),$$
$$\tau_G G'(t) + G([t/\tau_G]\tau_G) = Q(t) + \overline{\eta}_4(t),$$

где *L*(*t*) – уровень общих трудовых ресурсов в момент времени *t*; $L(t) = L(0)e^{\rho t}$; $L_1(t)$ – уровень трудовых ресурсов умственного труда в момент времени *t*; $L_1 = qL_1$, где $0 \le q \le 1$; $L_2(t)$ – уровень трудовых ресурсов физического труда в момент времени *t*; $L_2 = (1-q)L$, $\overline{\eta}_k(\cdot)$, $k = \overline{1,4}$, – неконтролируемые возмущения. Пусть, далее, *X*(*t*) – интенсивность воспроизводства ВВП в момент времени *t*; $X(t) = F(K(t), L_2(t), G(t))$, где $F(K, L_2, G)$ – неоклассическая линейно однородная ПФ; *K*(*t*) – уровень ОПФ в момент времени *t*, *G*(*t*) – реальный уровень человеческого капитала (ЧК) (знаний) в момент времени *t*, *Q*(*t*) – потенциальный (будущий) уровень ЧК (знаний) в момент времени *t*, μ_K – норма амортизации ОПФ, μ_Q – норма обесценивания ЧК (знаний), индекс обесценивания знаний, c_1 и c_2 – соответствующие нормы потребления для работников умственного и физического труда, причем, $c_1 > c_2$, $s = 1 - c_2 + (c_2 - c_1)q$, κ – коэффициент эффективности обучения работников физического труда, $H(t) = H(c_1 X(t)/L(t), L_1(t), Q(t))$ – интенсивность вклада работников умственного труда в процесс накопления знаний. Функция $H = H(x, y, z)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по всем аргументам неоклассической ПФ, причем по второму и третьему аргументам обращается в нуль, если хотя бы один аргумент равен нулю. Кроме того, для любых чисел $y > 0$ и $z > 0$ справедливы неравенства $\partial H/\partial x > 0$,

$\partial^2 H/\partial x^2 < 0$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x,y,z)$. Пример этой функции см.: [18, 4.4, с.96]. Как и в примере 6, $A(t) = C_a(t) + I_a(t) + E_x(t) + G_v(t)$ – сумма интенсивностей автономного потребления, автономных инвестиций, чистого экспорта и государственных закупок в момент времени t.

Перейдем к модели в относительных показателях $k(t)$, $v(t)$, $f(k(t))$, $q(t) = Q(t)/L(t)$ – удельного (подушевого) потенциального уровня знаний; $g(t) = G(t)/L(t)$ – удельного (подушевого) реального уровня знаний и $h(k(t), g(t))$ = $H(c_1 f(k(t)), L_1(t), G(t))/L(t)$ – удельного (подушевого) вклада работников умственного труда в процесс накопления знаний. Получим следующую систему:

$$k'(t) + (\mu_K + \rho)k(t) = v(t) + \eta_1(t),$$
$$\tau_V v'(t) + \tau_V \rho v(t) +$$
$$+\exp(-\rho\tau_V\{t/\tau_V\})v([t/\tau_V]\tau_V) =$$
$$= sf(k(t)) + a(t) + \eta_2(t),$$
$$q'(t) + (\mu_Q + \rho)q(t) =$$
$$= \kappa f(k(t)) + h(k(t), g(t)) + \eta_3(t),$$
$$\tau_G g'(t) + \tau_G \rho g(t) +$$
$$+\exp(-\rho\tau_G\{t/\tau_G\})g([t/\tau_G]/\tau_G) =$$
$$= q(t) + \eta_4(t).$$

2.9. *Неоклассическая нелинейная двухсекторная модель Удзавы – Лукаса динамики ВВП и человеческого капитала с учетом запаздывания ввода инвестиций в ОПФ и с учетом запаздывания образования человеческого капитала* [17; 49, гл.4, 4.3; 52; 53].

Модифицированная модель Х. Удзавы и Р.Е. Лукаса (мл.) в абсолютных показателях имеет вид

$$K'(t) + \mu_K K(t) = V(t) + \overline{\eta}_1(t),$$
$$\tau V'(t) + V([t/\tau_V]\tau_V) =$$
$$= F_X(K(t), (1-u(t))G(t), \overline{G}(t)) -$$
$$-C(t) - A(t) + \overline{\eta}_2(t),$$
$$\tau_G g'(t) + g([t/\tau_G]\tau_G) = h(t) + \overline{\eta}_3(t),$$
$$h'(t) + \mu_H h(t) = f_h(u(t), h(t), \overline{g}(t)) + \eta_4(t).$$

Здесь $L(t) = L(0)e^{\rho t}$ – уровень общих трудовых ресурсов в момент времени t; $u(t)$ – доля времени обучения, затраченного на образование в момент времени t; $G(t) = g(t)L(t)$ – реальный уровень ЧК (знаний) в обществе в момент времени t; $H(t) = h(t)L(t)$ – потенциальный (будущий) уровень ЧК (знаний) в обществе в момент времени t; $\overline{G}(t) = \overline{g}(t)L(t)$ – общественный уровень ЧК (знаний) (уровень образовательных услуг, оплачиваемых государством) в момент времени t. Соответственно обозначено: $g(t)$ – реальный индивидуальный средний уровень ЧК (знаний) в момент времени t; $h(t)$ – потенциальный (будущий) индивидуальный средний уровень ЧК (знаний) в момент времени t; $\overline{g}(t)$ – общественный средний уровень ЧК (знаний) (уровень образовательных услуг на одного человека, оплачиваемый государством) в момент времени t. Далее обозначено: $V(t)$ – интенсивность реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; $C(t)$ – интенсивность конечного непроизводственного потребления в момент времени t; $A(t) = A_e(t)$ + $I_a(t)$ + $E_x(t)$ + $G_v(t)$ – сумма интенсивностей внешних, автономных инвестиций чистого экспорта и государственных закупок в момент времени t; μ_K – норма амортизации ОПФ; μ_H – норма амортизации ЧК (включает в себя потери от снижения квалификации, смертности и выигрыш от приобретения опыта). Кроме того, $F_X(K, (1-u)G, \overline{G})$ – неоклассическая и линейно однородная по первым двум аргументам, а также непрерывно дифференцируемая по всем аргументам ПФ воспроизводства ВВП, $X(t)$ = $F_X(K(t), (1-u(t))G(t), \overline{G}(t))$, функция $F_X(\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,)$ обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов равен нулю, причем эластичность такой ПФ по третьему аргументу больше нуля и не больше единицы. Введена также дважды непрерывно дифференцируемая по всем аргументам функция $f_h(u, h, \overline{g})$ – ПФ (сектора) образования, обращающаяся в нуль, если хотя бы один из ее аргументов равен нулю. Предположено, что $\partial f_h/\partial u > 0$, $\partial^2 f_h/\partial^2 u < 0$ при $0 \le u \le 1$; $\partial f_h/\partial h > 0$ при $h \ge 0$ и существует такое $\hat{h} > 0$, что $\partial^2 f_h/\partial h^2 > 0$ при $0 \le h < \hat{h}$, $\partial^2 f_h/\partial h^2 = 0$ при $h = \hat{h}$ и $\partial^2 f_h/\partial h^2 < 0$ при $h > \hat{h}$. Кроме того, функция f_h является неоклассической линейно однородной ПФ по второму и третьему аргументам с эластичностью замещения $\sigma_{h\overline{g}} \in (0, \infty)$. Примеры функций F_X и f_h можно найти в работе [17].

Перейдем к модели в относительных показателях $k(t)$, $v(t)$, $g(t)$, $h(t)$,

$$f_X(k(t), (1-u(t))g(t), \overline{g}(t)) =$$
$$= F_X(K(t), (1-u(t))G(t), \overline{G}(t))/L(t)$$
$$= F_X(k(t), (1-u(t)g(t), \overline{g}(t)).$$

Получим следующую систему:

$$k'(t) + (\mu_K + \rho)k(t) = v(t) + \eta_1(t),$$
$$\tau_V v'(t) + \tau_V \rho v(t) +$$
$$+\exp(-\rho\tau_V\{t/\tau_V\})v([t/\tau_V]\tau_V) =$$
$$= f_X(k(t), (1-u(t))g(t), \overline{g}(t)) - c(t) - a(t) - \eta_2(t),$$
$$\tau_G g'(t) + g([t/\tau_G]\tau_G) = h(t) + \eta_3(t),$$

$$h'(t)+\mu_H h(t)= f_h(u(t),h(t),\bar{g}(t))+\eta_4(t)\,.$$

2.10. *Неоклассическая нелинейная односекторная модель Тобина – Сидрауски динамики ВВП с учетом денежного рынка* [18, 3.3, с.46-48, 9.5, с.280; 48, ч.V, гл.18, 18.2, с.566-574, 18.3, с.574-579]

Модифицированные варианты модели Дж.Тобина и М.Сидрауски в относительных, удельных, подушевых показателях имеют следующий вид:

а) в случае статических ожиданий $\pi_e(t)=\pi(t)$, или $\pi_e(t)=\pi(t-\tau)$:

$$k'(t)+(\mu s+\rho)k(t)=sf(k(t))-cm(t)(f'(k(t))+$$
$$+z_n(t)-\mu-r(k(t),m(t)))-a(t)+\eta_1(t)\,,$$
$$m'(t)=m(t)(f'(k(t))+z_n(t)-$$
$$-(\mu+\rho)-r(k(t),m(t)))+\eta_2(t)\;;$$

б) в случае статических ожиданий $\pi_e(t)=\pi(t+\tau)$:

$$k'(t)+(\mu s+\rho)k(t)=$$
$$=sf(k(t))-cm(t)(f'(k(t-\tau))$$
$$+z_n(t)-\mu-r(k(t-\tau),m(t-\tau)))-a(t)+\eta_1(t)\,,$$
$$m'(t)=m(t)(f'(k(t-\tau))+z_n(t)-$$
$$-(\mu+\rho)-r(k(t-\tau),m(t-\tau)))+\eta_2(t)\;;$$

в) в случае стандартных адаптивных ожиданий $\pi_e'(t)=\alpha(\pi(t)-\pi_e(t))$, или $\tau\pi_e'(t)+\pi_e(t)=\pi(t)$ при $\tau=1/\alpha$:

$$k'(t)+cm'(t)=sf(k(t))-(\mu s+\rho)k\ \ t\ \ -$$
$$-c\rho m(t)-a(t)+\eta_1(t)\,,$$
$$m'(t)(1+m(t)D(k(t),m(t)))+$$
$$+m(t)B(k(t),m(t))k'(t)=$$
$$=m\ \ t\ \ \ f'\ \ k\ \ \ t/\tau\ \ \tau\ \ \ +z_n\ \ t\ \ -$$
$$-(\mu+\rho)-r(k(t),m(t))+\eta_2(t)\;;$$

г) в случае адаптивных ожиданий $\tau\pi_e'(t)+\pi_e([t/\tau]\tau)=\pi(t)$:

$$k'(t)+cm'(t)=$$
$$=sf(k(t))-(\mu s+\rho)k(t)-c\rho m(t)-a(t)+\eta_1(t)\,,$$
$$m'(t)(1+m(t)D(k(t),m(t)))+$$
$$+m(t)B(k(t),m(t))k'(t)=$$
$$=m(t)(f'(k([t/\tau]\tau))+z_n(t)$$
$$-(\mu+\rho)-r(k([t/\tau]\tau),m([t/\tau]\tau))+\eta_2(t)\,.$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения: $K_n(t)$ и $L_n(t)$ – номинальные уровни (уровни в денежном выражении в номинальных ценах) ОПФ и трудовых ресурсов в момент времени *t*; $K(t)$ и $L(t)$ – реальные уровни (уровни в денежном выражении в реальных ценах) ОПФ и трудовых ресурсов в момент времени *t*; $K(t)=K_n(t)/P(t)$, $L(t)=L_n(t)/P(t)$, где $P(t)$ – номинальный уровень цен в стране в момент времени *t*; $L(t)=L(0)e^{\rho t}$. Соответственно определяем: $X_n(t)$ – интенсивность воспроизводства номинального ВВП в стране в момент времени *t*; $X(t)$ – интенсивность воспроизводства реального ВВП в стране в момент времени *t*; $X(t) = X_n(t)/P(t)$. Полагаем, что $X(t) = F(K(t),L(t))$, где $F(K,L)$ – дважды непрерывно дифференцируемая по всем аргументам линейно однородная неоклассическая ПФ. Справедливы равенства $X_n(t) = F(K_n(t),L_n(t))$ и $X_n(t)/L_n(t) = X(t)/L(t) = F(k(t),1) = f(k(t))$ – интенсивность (реальной) производительности труда в момент времени *t*, где $k(t)=K(t)/L(t)=K_n(t)/L_n(t)$ – уровень (реальной) капиталовооруженности в момент времени *t*.

Заметим, что если μ – норма амортизации ОПФ в реальных ценах, то для нормы амортизации $\mu_n(t)$ в номинальных ценах справедливо равенство $\mu_n(t)=\mu-\pi(t)$, где $\pi(t)=P'(t)/P(t)$ – индекс изменения номинального уровня цен (скорость, индекс, темп инфляции) в момент времени *t*. Действительно, если динамика реального уровня ОПФ описывается уравнением $K'(t)+\mu K(t)=V(t)$, где $V(t)$ – интенсивность реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени *t*, то замены $K(t)=K_n(t)/P(t)$, $V(t)=V_n(t)/P(t)$ приводят к уравнению $K_n'(t)+(\mu-\pi(t))K_n(t)=V_n(t)$, где $V_n(t)$ – интенсивность номинальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени *t*.

В основу модели для ОПФ взято макроэкономическое равенство $X(t) + \bar{\eta}_1(t) = C(t) + V(t) + E_x(t) + G_v(t)$, где $C(t)$ – интенсивность реального конечного непроизводственного потребления в момент времени *t*; $E_x(t)$ – интенсивность реального чистого экспорта в момент времени *t*; $G_v(t)$ – интенсивность реальных государственных закупок в момент времени *t*. Определим $A(t)=C_a(t)+I_a(t)+E_x(t)+G_v(t)$ – сумма интенсивностей реального автономного конечного непроизводственного потребления, реальных автономных инвестиций, реального чистого экспорта и реальных государственных закупок в момент времени *t*; $a(t)=A(t)/L(t)$; $\bar{\eta}_1(\cdot)$ и $\bar{\eta}_2(\cdot)$ – неконтролируемые возмущения.

В основу модели для денежного рынка положены следующие обозначения и предположения: $M_n(t)$ и $M(t)$ – соответственно номинальный и реальный уровни (количества) денежных запасов в стране в момент времени *t*; $M(t) = M_n(t)/P(t)$; $m_n(t) = M_n(t)/L(t)$ и $m(t) = M(t)/L(t)$ – соответственно подушевые, удельные уровни (количества) номинальных и реальных денег (денег в номинальных и реальных ценах) в момент времени *t*; $z_n(t) = M_n'(t)/M_n(t)$ и $z(t) = M'(t)/M(t)$ – соответственно индексы роста номинальных и реальных денежных накоплений в стране в момент времени *t*; $z_n(t) = z(t) + \pi(t)$; $r_n(t)$ и $r(t)$ – соответственно интенсивности ожидаемого номинального и реального удельного, подушевого притока денег на капитал в момент времени *t*; $r(t) = r_n(t)/P(t)$; $R_n(t)$ и $R(t)$ – соответственно интенсивности ожидаемого номинального и реального притока денег в стране в момент времени *t*; $r_n(t) = R_n(t)/L(t)$, $r(t) = R(t)/L(t)$.

Величины $r_n(t)$ и $r(t)$ определяются из равенства номинальных уровней спроса и предложения на деньги (из равенства спроса и предложения на номинальные деньги) в момент времени *t*:

$$M_{S,n}(t) = M_n(t) = M_{D,n}(t) =$$
$$= LP_n(X_n(t), W_n(t), R_n(t)),$$

где функция номинального спроса на деньги $LP_n(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ является непрерывно дифференцируемой по всем аргументам, линейно однородной, $W_n(t) = K_n(t) + M_n(t)$ и $W(t) = K(t) + M(t)$ – соответственно номинальный и реальный уровни (уровни номинального и реального) благосостояния в стране в момент времени *t*.

Перейдем к относительным показателям:

$$m_n(t) = M_n(t)/\ \ P\ \ t\ \ L\ \ t\ \ \ =$$
$$= LP_n(X_n(t), W_n(t), R_n(t))/(P(t)L\ \ t\ \ )$$
$$= lp(x(t), w(t), r\ \ t\ \ \ ,$$

где $x(t) = f(k(t))$ – интенсивность воспроизводства реального подушевого, удельного ВВП в реальных ценах в момент времени *t*; $w(t) = k(t) + m(t)$ – реальный удельный, подушевой уровень благосостояния в стране в момент времени *t*.

Предполагается, что функция $lp(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ реального удельного, подушевого спроса на деньги возрастает по первым двум аргументам и убывает по третьему аргументу, причем $\partial(lp)/\partial w < 1$. В таком случае существует неявно заданная функция $r = r(k, m)$, причем $\partial r/\partial k > 0$, $\partial r/\partial m < 0$. В модели также предполагается зависимость $r(t) = f'(k(t)) - \mu + \pi_e(t) + \overline{\eta}_2(t)$, где $\pi_e(t) = P_e'(t)/P_e(t)$ – индекс изменения ожидаемого (номинального) уровня цен (ожидаемая скорость, ожидаемый индекс, ожидаемый темп инфляции) в момент времени *t*.

Используют несколько гипотез инфляционных ожиданий: а) «наивные», статические или стационарные ожидания того, что инфляционные ожидания всегда соответствуют действительной инфляции [43, л.8, 8.3, с.230; 45, гл.10, 10.2.2, с.302], т.е. $\pi_e(t) = \pi(t)$. В качестве варианта таких ожиданий рассматривают статические ожидания с лагом запаздывания τ, т.е. $\pi_e(t) = \pi(t-\tau)$, или $\pi_e(t+\tau) = \pi(t)$. В этом случае будем брать зависимость $r(t) = f'(k(t)) - \mu + \pi_e(t+\tau) + \overline{\eta}_2(t)$. В дальнейшем оказывается, что эти два типа ожиданий приводят к одинаковой модели.

Рассматривают также следующие гипотезы об инфляционных ожиданиях: б) статические ожидания с лагом опережения τ, т.е. $\pi_e(t) = \pi(t+\tau)$, или $\pi_e(t-\tau) = \pi(t)$; в этом случае берем зависимость $r(t) = f'(k(t)) - \mu + \pi_e(t) + \overline{\eta}_2(t)$; в) стандартные адаптивные ожидания того, что в каждый момент времени *t* скорость ожиданий $\pi_e'(t)$ измеряется пропорционально ошибке наблюдения $\pi(t) - \pi_e(t)$, т.е. $\pi_e'(t) = \alpha(\pi(t) - \pi_e(t))$, где $\alpha > 0$ – коэффициент ожиданий, параметр адаптации (ожиданий) [18, 5.5, с.127; 43, л.2, 2.6, с.64-65, л.6, 6.5, с.189-190, л.8., 8.2, с.228]. Можно переписать это уравнение в виде $\tau\pi_e'(t) + \pi_e(t) = \pi(t)$, где $\tau = 1/\alpha$ – лаг запаздывания ожидаемого индекса инфляции. И, наконец, рассмотрим гипотезу г) адаптивного ожидания вида $\tau\pi_e'(t) + \pi_e([t/\tau]\tau) = \pi(t)$.

Далее введем уравнения для величины

$$m(t) = M_n(t)/L_n(t) = M_n(t)/(P(t)L(t)) =$$
$$= M(t)/L(t).$$

Действительно, справедливы равенства

$$m'(t)/m(t) = M_n'(t)/M_n(t) -$$
$$- L'(t)/L(t) - P'(t)/P(t) =$$
$$= z_n(t) - \rho - \pi(t),$$

откуда

$$m'(t) = m(t)(z_n(t) - \rho - \pi(t)).$$

Как показано в работе [18, 3.3, с.46-47], в случае «наивных» ожиданий $\pi_e(t) = \pi(t) = r(t) - f'(k(t)) + \mu - \overline{\eta}_1(t)$ и получаем уравнение

$$m'(t) = m(t)(f'(k(t)) + z_n(t) -$$
$$-(\mu + \rho) - r(k(t), m(t))) + \eta_2(t).$$

В случае стационарных ожиданий $\pi_e(t) = \pi(t-\tau)$ и зависимости $r(t) = f'(k(t)) - \mu + \pi_e(t) + \overline{\eta}_2(t)$ приходим к такому же уравнению. В случае стандартных адаптивных ожиданий из равенства $r(t) = f'(k(t)) - \mu + \pi_e(t) + \bar{\eta}_2(t)$ выводим

$$\pi(t) = \tau\pi_e'(t) + \pi_e(t) =$$
$$= \tau(r'(t) - f''(k(t))k'(t) - \bar{\eta}_2'(t)) +$$
$$+(r(t) - f'(k(t)) + \mu - \bar{\eta}_2(t)) =$$
$$= r_\tau(t) - (\tau f''(k(t))k'(t) + f'(k(t))) - \bar{\bar{\eta}}_2(t) + \mu,$$

где

$$r_\tau(t) = \tau r'(t) + r(t),\ \bar{\bar{\eta}}_2(t) = \tau\bar{\eta}_2'(t) + \bar{\eta}_2(t).$$

Вычислим

$$r_\tau(t) = \tau r'(t) + r(t) =$$
$$= \tau\left(\frac{\partial r}{\partial k}(k(t), m(t))k'(t) + \frac{\partial r}{\partial m}(k(t), m(t))m'(t)\right) +$$
$$+r(k(t), m(t)).$$

Окончательно получаем

$$\pi(t) = P'(t)/P(t) = B(k(t), m(t))k'(t) + D(k(t), m(t))m'(t)$$
$$+r(k(t), m(t)) - f'(k(t)) + \mu - \bar{\bar{\eta}}_2(t),$$

где

$$B(k(t), m(t)) = \tau\left(\frac{\partial r}{\partial k}(k(t), m(t)) - f''(k(t))\right),$$

$$D(k(t), m(t)) = \tau\frac{\partial r}{\partial m}(k(t), m(t)).$$

Подставим полученное выражение для $\pi(t)$ в уравнение $m'(t)/m(t) = z_n(t) - \rho - \pi(t)$, выведем уравнение

$$m'(t)(1 + m(t)D(k(t), m(t))) +$$
$$+m(t)B(k(t), m(t))k'(t) =$$
$$= m(t)(f'(k(t)) + z_n(t) -$$
$$-(\mu + \rho) - r(k(t), m(t))) + \eta_2(t).$$

В случае адаптивных ожиданий вида $\tau\pi_e'(t) + \pi_e([t/\tau]\tau) = \pi(t)$ аналогичное уравнение примет вид

$$m'(t)(1 + m(t)D(k(t), m(t))) +$$
$$+m(t)B(k(t), m(t))k'(t) =$$
$$= m(t)(f'(k([t/\tau]\tau)) + z_n(t) - (\mu + \rho) -$$
$$-r(k([t/\tau]\tau), m([t/\tau]\tau))) + \eta_2(t).$$

И, наконец, в случае статических ожиданий вида $\pi_e(t) = \pi(t+\tau)$ и зависимости $\pi_e(t) = r(t) - f'(k(t)) + \mu - \bar{\eta}_2(t)$ приходим к уравнению

$$m'(t) = m(t)(f'(k(t-\tau)) +$$
$$+z_n(t) - (\mu + \rho - r(k(t-\tau), m(t-\tau))) + \eta_2(t).$$

Для вывода первого уравнения модели используется зависимость $C(t) = cY_v(t) + C_a(t)$, где $Y_v(t) = X(t) - \mu K(t) + M'(t)$ – интенсивность реального располагаемого дохода (РРД) в момент времени *t*; *c* – предельная склонность к потреблению относительно РРД; $s = 1 - c$ – предельная склонность к сбережению относительно РРД.

Далее из макроэкономических равенств

$$X(t) + \bar{\eta}_1(t) = cY_v(t) + V(t) + E_x(t) + G_v(t)$$
$$= cY_v(t) + \mu K(t) + K'(t) + A(t),$$
$$Y_v(t) = X(t) - \mu K(t) + M'(t)$$

получаем, что

$$K'(t) + \mu K(t) = X(t) - cY_v(t) - A(t) + \bar{\eta}_1(t) =$$
$$= X(t) - c(X(t) - \mu K(t) + M'(t)) - A(t) + \bar{\eta}_1(t) =$$
$$= sX(t) + \mu cK(t) - cM'(t) - A(t) - \bar{\eta}_1(t),$$

откуда следует уравнение

$$K'(t) + \mu sK(t) = sX(t) - cM'(t) - A(t) - \bar{\eta}_1(t).$$

Переходим к относительным реальным показателям $k(t)$, $x(t) = f(k(t))$, $a(t) = A(t)/L(t)$, $\eta_1(t) = \bar{\eta}_1(t)/L(t)$. В результате для динамики капиталовооруженности получим уравнение

$$k'(t) + (\mu s + \rho)k(t) =$$
$$= sf(k(t)) - c(m'(t) + \rho m(t)) - a(t) + \eta_1(t),$$

или, по-другому,

$$k'(t) + cm'(t) =$$
$$= sf(k(t)) - (\mu s + \rho)k(t) - c\rho m(t) - a(t) + \eta_1(t).$$

В случае статических ожиданий $\pi_e(t) = \pi(t)$ это уравнение можно упростить (см., например, [18, 3.3, с.47]), подставив выражение для $m'(t)$ из другого уравнения. В итоге получим

$$k'(t) + (\mu s + \rho)k(t) = sf(k(t)) - cm(t)(f'(k(t)) +$$
$$+z_n(t) - \mu - r(k(t), m(t)) - a(t) + \eta_1(t).$$

В случае статических ожиданий $\pi_e(t) = \pi(t-\tau)$ это уравнение может быть преобразовано к виду

$$k'(t) + (\mu s + \rho)k(t) = sf(k(t)) - cm(t)(f'(k(t-\tau)) +$$
$$+z_n(t) - \mu - r(k(t-\tau), m(t-\tau)) - a(t) - \eta_1(t).$$

3. Устойчивость модифицированных моделей

В предлагаемой статье методом модельных уравнений [1-3] исследованы на устойчивость некоторые модификации моделей экономики. Рассмотрим несколько примеров применения теоремы 3 из статьи [31] (см. также работы А.И. Башкирова [10, 11] и А.И. Домошницкого с соавторами [16, 51]) для исследования устойчивости решений периодических линейных функционально-дифференциальных уравнений с последствием (ЛФДУП), возникающих при моделировании задач экономики.

3.1. *Простейшая линейная модель динамики чистого валового продукта (ЧВП) с уче-*

том запаздывания ввода индуцированных инвестиций

Модифицированная модель ЧВП может быть записана в виде уравнения

$$\tau Y''(t)+Y'([t/\tau]\tau)-\rho Y(t)=-\rho C(t),\ t\geq 0.$$

Здесь $Y(t)$ – интенсивность воспроизводства ЧВП в момент времени t, $C(t)$ – интенсивность конечного непроизводственного потребления в момент времени t, τ – лаг запаздывания ввода реальных индуцированных инвестиций, $\rho=1/B$ – технологический индекс роста (темп прироста), B – мощность (коэффициент) акселератора, (приростная) капиталоемкость ЧВП, коэффициент инвестиций. В этой модели за основу берется макроэкономическое тождество $Y(t)=I(t)+C(t)$, где $I(t)$ – интенсивность ввода реальных индуцированных инвестиций в момент времени t, причем величина инвестиций определяется будущим приростом ЧВП, т.е. имеет место зависимость типа акселератора с лагом $\tau: I(t)=BY'(t+\tau)$. Последнее равенство заменяем равенством $I(t)=B(Y'([t/\tau]\tau)+Y''(t))$.

Докажем неустойчивость нулевого решения $\tau-$периодического линейного однородного уравнения второго порядка

$$\tau x''(t)+x'([t/\tau]\tau)-\rho x(t)=0,\ t\geq 0. \qquad (2)$$

Фундаментальные решения x_1 и x_2 уравнения (2) на отрезке $[0,\tau]$, удовлетворяющие соответственно начальным условиям $x_1(0)=1$, $x_1'(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_2'(0)=1$, имеют вид $x_1(t)=\mathrm{ch}(\sigma t)$, $x_2(t)=-1/\rho\,\mathrm{ch}(\sigma t)+1/\sigma\mathrm{sh}(\sigma t)+1/\rho$, где $\sigma=\sqrt{\rho/\tau}$.

Матрица монодромии $X(\tau)$ эквивалентной двумерной системы имеет вид

$$X(\tau)=\begin{pmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau)\\ x_1'(\tau) & x_2'(\tau)\end{pmatrix},$$

где $x_1(\tau)=\mathrm{ch}(\sqrt{\tau\rho})$, $x_1'(\tau)=\sigma\,\mathrm{sh}(\sqrt{\tau\rho})$,

$$x_2(\tau)=-1/\rho\,\mathrm{ch}(\sqrt{\tau\rho})+$$
$$+1/\sigma\,\mathrm{sh}(\sqrt{\tau\rho})+1/\rho,$$
$$x_2'(\tau)=-1/\sqrt{\tau\rho}\,\mathrm{sh}(\sqrt{\tau\rho})+\mathrm{ch}(\sqrt{\tau\rho}).$$

Отсюда находим коэффициенты

$$a_1=1/\sqrt{\tau\rho}\,\mathrm{sh}(\sqrt{\tau\rho})-2\,\mathrm{ch}(\sqrt{\tau\rho})$$

и

$$a_2=1-\frac{1}{\sqrt{\tau\rho}}\mathrm{sh}(\sqrt{\tau\rho})$$

характеристического уравнения

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$$

для собственных чисел λ_1 и λ_2 матрицы $X(\tau)$.

Оба корня этого уравнения по модулю меньше единицы тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (см., например, [15, гл. III, § 16, с. 190])

$$1+a_1+a_2>0,\quad 1-a_1+a_2>1,\quad 1-a_2>0.$$

В нашем случае получается, что $1+a_1+a_2=2(1-\mathrm{ch}\sqrt{\rho\tau})<0$, т.е. тривиальное решение уравнения (2) неустойчиво.

3.2. *Линейная модель Филлипса – Гудвина динамики ЧВП*

Модифицированный вариант модели А. Филлипса и Р.М.Гудвина в обозначениях статьи принимает вид

$$TY'(t)+Y([t/T]T)=cY(t)+I(t)+A(t),\ t\geq 0.$$

Здесь в обозначениях примера 3.1 интенсивность индуцированных инвестиций $I(t)$ определяется через линейный акселератор $I(t)=BY'(t)+\eta(t)$, где $\eta(t)$ – неконтролируемое возмущение, T – лаг запаздывания воспроизводства ЧВП, c – предельная склонность к потреблению, $A(t)=C_a(t)+I_a(t)+E_x(t)+G_v(t)$ – сумма интенсивностей автономного потребления, автономных инвестиций, чистого экспорта и государственных закупок в момент времени t.

В этой модели за основу берется макроэкономическое тождество $Y_D(t)=C(t)+I(t)+E_x(t)+G_v(t)$, где $Y_D(t)$ – интенсивность спроса на ЧВП в момент времени t, $C(t)=cY(t)$ – интенсивность индуцированного конечного непроизводственного потребления в момент времени t, c – предельная склонность к потреблению. Дифференциальное уравнение модели возникает в результате запаздывания воспроизводства ЧВП $Y(t)$ с лагом T по отношению к спросу на ЧВП $Y_D(t)$, а также вследствие эффекта акселерации.

Будем изучать при $T\neq B$ экспоненциальную устойчивость тривиального решения $T-$периодического линейного однородного уравнения первого порядка

$$(T-B)Y'(t)+Y([t/T]T)-cY(t)=0,\ t\geq 0. \qquad (3)$$

На отрезке $[0,T]$ фундаментальное решение Y_1 этого уравнения определено формулой

$$Y_1(t)=1/c-(1/c-1)\exp(ct/(T-B)),$$

откуда

$$Y_1(T)=1/c-(1/c-1)\exp(cT/(T-B)).$$

Проверка неравенства $|Y_1(T)|<1$ приводит к критерию: тривиальное решение уравнения (3) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$T > B$. Неустойчивость имеет место в случае $T < B$.

3.3. *Линейная односекторная модель динамики валового внутреннего продукта (ВВП) с равномерным способом начисления амортизации*

Модифицированная модель динамики ВВП имеет вид

$$K'(t) + \mu K([t]) = V(t) + A(t) + \eta(t),\ t \ge 0. \quad (4)$$

Здесь $K(t)$ – уровень ОПФ (производственного капитала) в момент времени t, μ – норма амортизации ОПФ, $V(t) = aX(t)$ – интенсивность ввода реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t, a – норматив инвестиций в ОПФ, $X(t) = vK(t)$ – интенсивность воспроизводства ВВП в момент времени t, v – капиталоотдача, $A(t)$ – интенсивность автономных инвестиций в момент времени t, $\eta(\cdot)$ – неконтролируемое возмущение.

На отрезке $[0,T]$ фундаментальное решение K_1 уравнения (4) определено формулой $K_1(t) = (1 - \mu/(av))\exp(avt) + \mu/(av)$, откуда $K_1(1) = (1 - \mu/(av))\exp(av) + \mu/(av)$. Проверка неравенства $|K_1(1)| < 1$ приводит к критерию: тривиальное решение уравнения (4) при $V(t) \equiv 0$, $A(t) \equiv 0$, $\eta(t) \equiv 0$ экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $av < \mu$. Неустойчивость имеет место в случае $av > \mu$. Нулевое решение устойчиво (но не экспоненциально) при $av = \mu$.

3.4. *Линейная односекторная модель Рамсея – Солоу – Свена (РСС) динамики ВВП с равномерным способом начисления амортизации*

Модифицированная модель РСС в абсолютных показателях имеет вид

$$K'(t) + \mu K([t]) = V(t) + \bar{\eta}(t),\ t \ge 0.$$

Здесь в обозначениях примера 3.3: $K(t)$ – уровень ОПФ (производственного капитала) в момент времени t, μ – норма амортизации ОПФ, $V(t) = sX(t)$ – интенсивность ввода реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t, s – предельная склонность к сбережению (инвестированию) по отношению к ВВП, $X(t) = F(K(t), L(t))$ – интенсивность воспроизводства ВВП в момент времени t, $F(K,L) = aK + bL$ – линейная производственная функция, $L(t) = L(0)\exp(\rho t)$ – уровень трудовых ресурсов в момент времени t, $\bar{\eta}(\cdot)$ – неконтролируемое возмущение.

Модель РСС динамики ВВП с равномерным способом начисления амортизации в относительных, удельных показателях имеет вид

$$k'(t) + \rho k(t) + \mu \exp(-\rho\{t\})k([t]) =$$
$$= sf(k(t)) + \eta(t),\ t \ge 0,$$

где $k(t) = K(t)/L(t)$ – капиталовооруженность (фондовооруженность), $v(t) = V(t)/L(t)$ – подушевые, удельные инвестиции,

$$f(k(t)) = F(K(t), L(t))/L(t) = ak(t) + b$$

– производительность труда, $\{t\}$ – дробная часть числа t, $\eta(t) = \bar{\eta}(t)/L(t)$.

Запишем модель в виде периодического линейного уравнения первого порядка относительно капиталовооруженности $k(t)$:

$$k'(t) + (\rho - sa)k(t) + \mu\exp(-\rho\{t\})k([t]) =$$
$$= sb + \eta(t),\ t \ge 0.$$

На отрезке $[0,1]$ фундаментальное решение $k_1(t)$ этого уравнения имеет вид:

$$k_1(t) = (1 - \mu/(sa))\exp((sa - \rho)t) +$$
$$+ \mu/(sa)\exp(-\rho t),$$

откуда

$$k_1(1) = (1 - \mu/(sa))\exp(sa - \rho) + \mu/(sa)\exp(-\rho).$$

Таким образом, экспоненциальная устойчивость тривиального решения уравнения будет при выполнении неравенства

$$|(1 - \mu/(sa))\exp(sa - \rho) + \mu/(sa)\exp(-\rho)| < 1.$$

Неустойчивость нулевого решения будет иметь место при

$$|(1 - \mu/(sa))\exp(sa - \rho) + \mu/(sa)\exp(-\rho)| > 1,$$

устойчивость (не экспоненциальная) – при

$$|(1 - \mu/(sa))\exp(sa - \rho) + \mu/(sa)\exp(-\rho)| = 1.$$

В последнем случае однородное уравнение будет иметь периодические решения.

Рассмотрим несколько примеров применения теоремы 4 из статьи [2] для исследования устойчивости решений нелинейных периодических ЛФДУП, возникающих при макромоделировании задач экономики.

Нелинейное скалярное функционально-дифференциальное уравнение

$$(Lx)(t) = (Fx)(t) + f(t),\ t \ge 0$$

будем называть локально $C-$устойчивым в окрестности тривиального решения (будем говорить, что уравнение обладает локальным $C-$свойством), если существует такое $\delta_0 > 0$, что для любой пары $\{f, \alpha\} \in L_\infty \times R$, $\|f\|_{L_\infty} < \delta_0$ $|\alpha| < \delta_0$ существует единственное решение $x \in C$ задачи Коши $Lx = Fx + f$, $x(0) = \alpha$, и это решение по норме C непрерывно зависит от $\{f, \alpha\}$ по норме $L_\infty \times R$.

Здесь L_∞ – пространство измеримых и существенно ограниченных функций $\mathbf{f}: [a,\infty) \to \mathbf{R}$ с нормой

$$\| f \|_{L_\infty} \equiv \operatorname*{vrai\,sup}_{t\ge a} | f(t) |,$$

C – пространство непрерывных и ограниченных функций $\mathbf{u}: [a,\infty) \to \mathbf{R}$ с нормой $\| u \|_C \equiv \sup\limits_{t\ge a} | u(t) |$.

3.5. *Нелинейная модель Филлипса – Гудвина динамики ЧВП*

Модифицированный вариант модели А. Филлипса и Р.М. Гудвина в обозначениях статьи принимает вид

$$TY'(t)+Y([t/T]T) = cY(t)+I(t)+A(t),\ t\ge 0. \quad (5)$$

Здесь в обозначении примеров 3.1 и 3.2: $Y(t)$ – интенсивность воспроизводства ЧВП в момент времени t; $cY(t)$ – интенсивность индуцированного непроизводственного потребления в момент времени t; c – предельная склонность к потреблению; $I(t)$ – интенсивность индуцированных инвестиций, которая в каждый момент времени t определяется через нелинейный акселератор $I(t) = \Phi(Y'(t)) + \eta(t)$; $\Phi(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая функция нелинейного акселератора индуцированных инвестиций, причем $\Phi(0)=0$, $d\Phi/dY' > 0$; $\eta(\cdot)$ – неконтролируемое возмущение; T – лаг запаздывания воспроизводства ЧВП;

$$A(t) = C_a(t)+I_a(t)+E_x(t)+G_v(t)$$

– сумма интенсивностей автономного потребления, автономных инвестиций, чистого экспорта и государственных закупок в момент времени t.

В этой модели за основу берется макроэкономическое тождество $Y_D(t) = C(t) + I(t)+E_x(t)+G_v(t)$, где $Y_D(t)$ – интенсивность спроса на ЧВП в момент времени t. Дифференциальное уравнение модели возникает в результате запаздывания воспроизводства ЧВП $Y(t)$ с лагом T по отношению к спросу на ЧВП $Y_D(t)$, а также вследствие эффекта акселерации. Обозначим $d\Phi/dY'|_{Y'=0} = B$.

В окрестности нуля для уравнения (5) линейное однородное уравнение первого приближения имеет вид

$$(T-B)Y'(t)+Y([t/T]T)-cY(t)=0,\ t\ge 0. \quad (6)$$

В примере 3.2 установлено, что тривиальное решение уравнения (6) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $T > B$. Тогда из работ А.И. Башкирова (см., например, [10, 11]) следует, что функция Коши этого уравнения имеет экспоненциальную оценку с отрицательным показателем. Отсюда следует, что $C-$устойчивость уравнения (6) [1]. А значит, в силу теоремы 4 из статьи [2] уравнение (5) локально $C-$устойчиво в окрестности нулевого решения.

3.6. *Нелинейная односекторная модель динамики ВВП с равномерным способом начисления амортизации*

Модифицированная модель динамики ВВП имеет вид

$$K'(t)+\mu K([t]) = V(t)+A(t)+\eta(t),\ t\ge 0. \quad (7)$$

Здесь в обозначениях примера 3.3: $K(t)$ – уровень ОПФ (производственного капитала) в момент времени t; μ – норма амортизации ОПФ; $V(t)=aX(t)$ – интенсивность ввода реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; a – норматив инвестиций в ОПФ; $X(t) = F(K(t))$ – интенсивность воспроизводства ВВП в момент времени t; $F(\cdot)$ – однофакторная непрерывно дифференцируемая производственная функция, причем $F(0)=0$, $dF/dK>0$; $A(t)$ – интенсивность автономных инвестиций в момент времени t; $\eta(t)$ – неконтролируемое возмущение.

Обозначим $dF/dK(0)=v$. В окрестности нуля для уравнения (7) линейное однородное уравнение первого приближения имеет вид

$$K'(t)+\mu K([t]) - avK(t)=0,\quad t\ge 0. \quad (8)$$

В примере 3.3 установлено, что тривиальное решение уравнения (8) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $\mu > av$. Тогда из работ А.И. Башкирова (см., например, [10, 11]) следует, что функция Коши этого уравнения имеет экспоненциальную оценку с отрицательным показателем. Отсюда следует $C-$устойчивость уравнения (8) [1]. А значит, в силу теоремы 4 из статьи [2] уравнение (7) локально $C-$устойчиво в окрестности тривиального решения.

3.7. *Неоклассическая нелинейная односекторная модель РСС динамики ВВП с равномерным способом начисления амортизации*

Модифицированная модель РСС в абсолютных показателях имеет вид

$$K'(t)+\mu K([t]) = V(t)+\overline{\eta}(t),\ t\ge 0.$$

Здесь в обозначениях примера 3.4: $K(t)$ – уровень ОПФ в момент времени t; μ – норма амортизации ОПФ; $V(t)=sX(t)$ – интенсивность ввода реальных валовых инвестиций в ОПФ в момент времени t; s – предельная склонность к сбережению (инвестированию) по отношению к ВВП; $X(t) = F(K(t),L(t))$ – интенсивность воспроизводства ВВП в момент времени t; $F(K,L)$ – дважды непрерывно дифференцируемая линейно однородная производственная функция, причем $F(0,L)=0$ и $F(K,0)=0$, $\partial F/\partial K>0$ $\partial F/\partial L>0$; $L(t)=L(0)e^{\rho t}$ – уровень трудовых ресурсов в момент времени t; $\overline{\eta}(t)$ – неконтролируемое возмущение.

Модифицированная модель РСС динамики ВВП с равномерным способом начисления амортизации в относительных, удельных показателях имеет вид

$$k'(t)+\rho k(t)+\mu\exp(-\rho\{t\})k([t])= \\ =sf(k(t))+\eta(t),\ t\ge 0, \qquad (9)$$

где $\{t\}$ – дробная часть числа t, $\eta(t)=\overline{\eta}(t)/L(t)$.

Пусть k^* – какое-либо $1-$периодическое решение уравнения (9) при некотором $1-$периодическом измеримом и существенно ограниченном возмущении η^*. Тогда функция $x=k-k^*$ является решением уравнения

$$x'(t)+\rho x(t)+\mu\exp(-\rho\{t\})x([t])= \\ = sf(x(t)+k^*(t)) + \\ + \eta^*(t) - sf(k^*(t)) - \eta^*(t),\ t\ge 0. \qquad (10)$$

В окрестности тривиального решения уравнения (10) линейное однородное уравнение первого приближения имеет вид

$$x'(t)+(\rho-sf'(k^*(t)))x(t) + \\ + \mu\exp(-\rho\{t\})x([t])=0,\quad t\ge 0. \qquad (11)$$

Аналогично примеру 3.4 на отрезке $[0,1]$ фундаментальное решение $x_1(t)$ этого уравнения имеет вид

$$x_1(t)=\exp(s\int_0^t f'(k^*(\tau))d\tau-\rho t)\times \\ \times(1-\mu\int_0^t\exp(-s\int_0^\tau f'(k^*(\tau_1))d\tau_1)d\tau).$$

Отсюда следует, что тривиальное решение уравнения (11) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$|\mu\int_0^1\exp(-s\int_0^\tau f'(k^*(\tau_1))d\tau_1)d\tau-1|< \\ <\exp(\rho-s\int_0^1 f'(k^*(\tau))d\tau).$$

В случае выполнения последнего неравенства из работ А.И. Башкирова (см., например, [10, 11]) следует, что функция Коши этого уравнения имеет экспоненциальную оценку с отрицательным показателем. Отсюда следует $C-$устойчивость уравнения (11) [1]. А значит, в силу теоремы 4 из статьи [2] уравнение (10) локально $C-$устойчиво в окрестности тривиального решения.

Заметим, что существование $1-$периодического решения k^* можно получить с помощью теорем об интегральных или функционально-интегральных неравенствах (см., например, [3, 24]).

Пусть k^* – какое-нибудь положительное и ограниченное на $[0,\infty)$ решение уравнения (9) при некотором измеримом и существенно ограниченном возмущении η^*. Введем отрезок $[\alpha,\beta]$, где $\alpha=\min_{t\ge 0}k^*(t)$, $\beta=\max_{t\ge 0}k^*(t)$. Тогда в окрестности тривиального решения уравнения (10) линейное однородное уравнение первого приближения имеет вид

$$(Lx)(t)=x'(t)+(\rho-sf'(k^*(t)))x(t) + \\ + \mu\exp(-\rho\{t\})x([t])=0,\quad t\ge 0. \qquad (12)$$

Сопоставим уравнение (12) с минорантным уравнением

$$(L_m x)(t)=x'(t)+(\rho-sf'(\beta))x(t) + \\ + \mu\exp(-\rho\{t\})x([t])=0,\quad t\ge 0. \qquad (13)$$

Сопоставим уравнение (12) с мажорантным уравнением

$$(L^m x)(t)=x'(t)+(\rho-sf'(\alpha))x(t) + \\ + \mu\exp(-\rho\{t\})x([t])=0,\quad t\ge 0. \qquad (14)$$

Нетрудно доказать, что если $x(t)$ – решение уравнения (12) при начальном условии $x(0)=x_0$, то оно удовлетворяет двухсторонней оценке $x_m(t)\le x(t)\le x^m(t)$. Здесь $x_m(t)$ – решение уравнения (13) при начальном условии $x_m(0)=x_{0m}$, $x^m(t)$ – решение уравнения (14) при начальном условии $x^m(0)=x_0^m$. Причем

$$x_{0m}\le x_0\le x_0^m.$$

Нужно установить, что уравнение (14) экспоненциально устойчиво.

В примере 3.4 установлено, что тривиальное решение уравнения (14) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$|(1-\mu/(sf'(\alpha)))\exp(sf'(\alpha)-\rho) + \\ + \mu/(sf'(\alpha))\exp(-\rho)|<1.$$

В случае выполнения последнего неравенства из работ А.И. Башкирова (см., например, [10, 11]) следует, что функция Коши уравнения (14) имеет экспоненциальную оценку с отрицательным показателем. Отсюда следует $C-$устойчивость уравнения (14) [1]. А решения этого уравнение оценивают решения уравнения (12). Отсюда следует $C-$устойчивость уравнения (12) [1]. Далее из сравнения функций Коши уравнения первого приближения (12) и периодического мажоратного уравнения сравнения (14) в силу теоремы 4 из статьи [2] уравнение (10) локально C – устойчиво в окрестности тривиального решения.

Заметим, что существование ограниченного решения k^* можно получить с помощью теорем об интегральных или функционально-интегральных неравенствах (см., например, [3]).

Историю вопроса об общем экономическом равновесии и современное состояние моделей экономического роста можно посмотреть в статьях [42, 50].

Работа выполнена при финансовой поддержке ЗАО «ПРОГНОЗ».

Список литературы

1. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1997. № 6 (421). С. 3-16.
2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом. II // Изв. вузов. Математика. 2000. № 4 (455). С. 3-13.
3. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. 230 с.
4. *Аллен Р.* Математическая экономия. М.: ИЛ, 1963. 668 с.
5. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 294 с.
6. *Аткинсон Э.Б., Стиглиц Дж.Э.* Лекции по экономической теории государственного сектора. М.: Аспект Пресс, 1995. 832 с.
7. *Баркалов Н.Б.* Производственные функции в моделях экономического роста. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. 128 с.
8. *Бугаян И.Р.* Макроэкономика. Ростов-н/Д: Феникс, 2000. 352 с.
9. *Багриновский К.А.* Модели и методы экономической кибернетики. М.: Экономика, 1973. 208 с.
10. *Башкиров А.И.* К вопросу об устойчивости уравнения с последействием с периодическими параметрами / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1983. 19 с. Деп. в ВИНИТИ 24.08.83, № 4605-83 Деп.
11. *Башкиров А.И.* Признак экспоненциальной устойчивости уравнения с последействием и с периодическими параметрами // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1994-1997.
12. *Бергстром А.Р.* Построение и применение математических моделей. М.: Прогресс 1970. 176 с.
13. *Голиченко О.Г.* Экономическое развитие в условиях несовершенной конкуренции: Подходы к многоуровневому моделированию. М.: Наука, 1999. 192 с.
14. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика, 1985. 240 с.
15. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
16. *Домошницкий А.И.* Возрастание вронскиана и свойства решений уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1983. 9 с. Деп. в ВИНИТИ 28.04.83, № 2250-83 Деп.
17. *Д'Отюм А., Шараев Ю.В.* Образование и эндогенный экономический рост: модель Лукаса: науч. докл. М.: ГУ ВШЭ, 1998. 34 с.
18. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999. 336 с.
19. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В.* Математические модели в экономике. М.: Наука, 1979. 304 с.
20. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 607 с.
21. *Кобринский Н.Е., Майминас Е.З., Смирнов А.Д.* Экономическая кибернетика. М.: Экономика, 1982. 408 с.
22. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. 3-е стереотип. изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 400 с.
23. *Ланге О.* Введение в экономическую кибернетику. М.: Прогресс, 1968. 208 с.
24. *Мартынова М.И., Симонов П.М.* Две теоремы о существовании периодических решений для нелинейного дифференциального уравнения запаздывающего типа // Краевые задачи: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1991. С. 62-74.
25. *Моделирование* народнохозяйственных процессов / под ред. В.С.Дадаяна. М.: Экономика, 1973. 480 с.
26. *Моделирование* народнохозяйственных процессов / под ред. И.В.Котова. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 288 с.
27. *Накоряков В.Е., Гасенко В.Г.* Математическая модель плановой макроэкономики // Экономика и мат. методы. 2002. Т. 38, № 2. С. 118-124.
28. *Основы* теории оптимального управления / под ред. В.Ф.Кротова. М.: Высш. шк., 1990. 432 с.
29. *Перский Ю.К., Шульц Д.Н.* Развитие представлений об иерархическом устройстве экономики в истории экономической мысли // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2013. Вып. 4. С. 13-19.
30. *Пу Т.* Нелинейная экономическая динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 200 с.

31. *Симонов П.М.* Теоремы об устойчивости обобщенных линейных периодических уравнений // Функционально-дифференц. уравнения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1986. С. 23-26.

32. *Симонов П.М.* Динамические математические модели с последействием в экономики и биологии // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2002. Т. 9, вып. 3. С. 634-655.

33. *Симонов П.М.* О некоторых динамических моделях микроэкономики // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика / Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 2002. С. 109-114.

34. *Симонов П.М.* О некоторых динамических моделях макроэкономики // Экономическая кибернетика: Математические и инструментальные методы анализа, прогнозирования и управления: сб. ст. / Перм. ун-т. Пермь, 2002. С. 213-231.

35. *Симонов П.М.* Об одном методе исследования динамических моделей // Развитие профессионального образования в XXI веке: сб. ст. / Перм. колледж экономики, статистики и информатики. Пермь, 2002. С. 135-144.

36. *Симонов П.М.* Исследование устойчивости решений некоторых динамических моделей микро- и макроэкономики // Вестник Пермского ун-та. Математика. Информатика. Механика / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2003. С. 88-93.

37. *Симонов П.М.* Об одном методе исследования динамических моделей экономики (метод элементарных моделей) // Развитие экономико-математического моделирования: сб. ст. М.: Грант Виктория ТК, 2006. С. 77-94.

38. *Симонов П.М.* On a method of research of dynamic economic models // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2006. № 3. С. 137-138.

39. *Симонов П.М.* Об одном методе исследования динамических моделей экономики (метод модельных уравнений) // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2006. № 2. С. 55-58.

40. *Симонов П.М.* Об одном методе исследования динамических моделей экономики // VI Всесоюзная научная конференция «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и биотехнологии», ЭКОМОД-2011: сб. тр. / ВятГУ. Киров, 2011. С. 347-353.

41. *Симонов П.М.* Об одном методе исследования динамических моделей микроэкономики // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2012. Спец. выпуск. С. 50-57.

42. *Симонов П.М., Шульц Д.Н., Шульц М.Н.* Эволюция теории общего экономического равновесия // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2012. Вып. 3. С. 32-38.

43. *Смирнов А.Д.* Лекции по макроэкономическому моделированию. М.: ГУ ВШЭ, 2000. 352 с.

44. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост (принципы макроэкономического анализа). М.: Статистика, 1973. 472 с.

45. *Тарасевич Л.С.,* Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика: учебник. 6-е изд., испр. и доп. М.: Высшее образование, 2008. 655 с.

46. *Тинбэрхэн Я., Бос Х.* Математические модели экономического роста. М.: Прогресс, 1967. 176 с.

47. *Титов Н.И., Успенский В.К.* Моделирование систем с запаздыванием. Л.: Энергия, Ленингр. отд-ние, 1969. 97 с.

48. *Харрис Л.* Денежная теория. М.: Прогресс, 1990. 751 с.

49. *Шараев Ю.В.* Теория экономического роста: учеб. пос. для вузов. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006. 254 с.

50. *Шульц Д.Н.* Об ограничениях современной модели экономического роста России // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2011. Вып. 3. С. 37-44.

51. *Agarwal R.,* Bohner M., Domoshnitsky A., Goltser Y. Floquet theory and stability of nonlinear integro-differential equations // Acta Math. Hungar. 2005. V. 109, № 4. P. 305-330.

52. *Lucas R.E., Jr.* On the mechanics of economic development // J. of Monetary Economics. 1988. Vol. 22, № 7. P. 3-42.

Uzawa H. Optimum technical change in an aggregative model of economic growth // Internat. Economic