

РАЗДЕЛ II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

УДК 517.9: 338.24

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ¹

В.П. Максимов, д. физ.-мат. наук, проф. кафедры информационных систем и математических методов в экономике

Д.А. Поносов, аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике

А.Л. Чадов, аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике

ГОУВПО «Пермский государственный университет», 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Электронный адрес: maksimov@econ.psu.ru

Рассматриваются некоторые задачи экономико-математического моделирования – задачи управления и задачи корректной разрешимости для динамических моделей в виде систем с запаздыванием – как для непрерывного, так и для дискретного времени. Для систем с непрерывным временем рассматривается влияние последствия в канале управления на общие затраты по целевому управлению системой. Для систем с дискретным временем рассматривается возможность коррекции противоречивых задач динамического планирования на основе подхода, предложенного для статических моделей акад. И.И. Ереминым.

Ключевые слова: экономико-математические модели; системы с последствием; задачи управления.

1. Введение

Исследование задач управления конкретными социально-экономическими системами (регион, крупное предприятие, коммерческая структура, отрасль и т.п.) предполагает наличие специального модельного, математического и компьютерного инструментария. Подходы, использующие адекватные экономико-математические модели и современные методы их исследования (см., например, [1,6]), дают возможность найти пути и методы достижения целей, сбалансировать цели и средства их достижения.

Напомним необходимую для дальнейшего постановку классической задачи управления для системы с непрерывным временем. Для дифференциальной системы $(Lx)(t) \equiv \dot{x}(t) + A(t)x(t) = F(t)u(t) + f(t)$, $t \in [0, T]$ требуется найти управление u , переводящее

систему из заданного начального состояния $x(0) = \alpha$ в заданное конечное состояние $x(T) = \beta$. Задачам управления для обыкновенных дифференциальных систем и систем с запаздыванием посвящена обширная литература (см., например, [2] и приводимый там библиографический список). В экономической динамике возникает более общая задача управления, в которой цель управления задается системой линейных функционалов, а динамика описывается функционально-дифференциальными уравнениями [5].

Сначала мы приводим необходимые сведения из теории функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) и формулируем условия разрешимости общей задачи управления. На основе этих результатов предлагаются соотношения для оценки влияния

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, РФФИ №10-01-96054, и компании «Прогноз».

запаздывания в канале управления на величину ресурса управления, необходимого для решения поставленной задачи.

Для систем с дискретным временем рассматривается возможность коррекции противоречивых задач динамического планирования на основе подхода, предложенного для статистических моделей акад. И.И.Ереминым.

2. Предварительные сведения

Пусть D и B – банаховы пространства и D изоморфно прямому произведению $B \times R^n$.

Уравнение

$$\mathcal{L}x = f \quad (1)$$

с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L}: D \rightarrow B$ называется линейным абстрактным функционально-дифференциальным уравнением (АФДУ). Теория уравнения (1) систематически изложена в [1,6,7]. Зафиксируем изоморфизм $J = \{\Lambda, Y\}: B \times R^n \rightarrow D$ и обозначим через $J^{-1} = [\delta, r]$ обратного оператора. Здесь $\Lambda: B \rightarrow D, Y: R^n \rightarrow D$ и $\delta: D \rightarrow B, r: D \rightarrow R^n$ – соответствующие компоненты операторов J и J^{-1} :

$$J\{z, \alpha\} = \Lambda z + Y\alpha \in D, \quad z \in B, \quad \alpha \in R^n,$$

$$J^{-1}x = \{\delta x, rx\} \in B \times R^n, \quad x \in D.$$

Система

$$\delta x = z, \quad rx = \alpha \quad (2)$$

называется главной краевой задачей. Таким образом, для любого $\{z, \alpha\} \in B \times R^n$

$$x = \Lambda z + Y\alpha \quad (3)$$

является решением системы (2). Равенство (3) дает представление оператора $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}x = \mathcal{L}(\Lambda z + Y\alpha) = Qz + A\alpha,$$

где так называемая главная часть оператора $\mathcal{L}$, – оператор $Q: B \rightarrow B$ и конечномерный оператор $A: R^n \rightarrow B$ определены равенствами $Q = \mathcal{L}\Lambda$ и $A = \mathcal{L}Y$. В рамках общей теории уравнения (1) оператор Q предполагается фредгольмовым (представимым в виде суммы компактного и обратимого операторов).

Рассмотрим общую краевую задачу

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = \beta \quad (4)$$

с линейным ограниченным вектор-функционалом $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_N]: D \rightarrow R^N$. Краевая задача (4) как объект исследования находится в центре внимания общей теории АФДУ. В случае, когда $N = n$ и задача (4) однозначно разрешима для любого $\{f, \beta\} \in B \times R^n$, справедливо представление ее решения в виде

$$x = Gf + X\beta. \quad (5)$$

Оператор $G: B \rightarrow D$ называется

оператором Грина, оператор $X: R^n \rightarrow D$, – фундаментальным вектором. Пусть главная краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad rx = \alpha \quad (6)$$

однозначно разрешима. В таком случае, обозначая через G_r оператор Грина этой задачи, имеем представление

$$x = G_r f + X\alpha \quad (7)$$

общего решения уравнения $\mathcal{L}x = f$, считая, что α – произвольный элемент пространства R^n . Из представления (7) следует, что однозначная разрешимость задачи (4) эквивалентна однозначной разрешимости алгебраической системы $\ell X \alpha = \beta - \ell G_r f$. Таким образом, краевая задача однозначно разрешима тогда и только тогда, когда обратима матрица ℓX .

Рассмотрим абстрактную задачу управления

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}u + f, \quad rx = \alpha, \quad \ell x = \beta, \quad (8)$$

где управление u принадлежит гильбертову пространству H , $\mathcal{F}: H \rightarrow B$ – линейный ограниченный оператор, $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_N]$ – целевой вектор-функционал, определяющий цель управления: $\ell x = \beta$. Приведем здесь теорему о разрешимости задачи (8).

Определим линейный ограниченный функционал $\lambda_i: H \rightarrow R, i = 1, \dots, N$, равенством $\lambda_i u = \ell_i G_r \mathcal{F}u$. Очевидно, что можно представить этот функционал в виде скалярного произведения: $\lambda_i u = \langle \mu_i, u \rangle$, где $\mu_i \in H$ – элемент, порождающий $\lambda_i: H \rightarrow R$.

ТЕОРЕМА 1 ([6]). *Задача управления (8) разрешима для любых $f \in B, \alpha \in R^n, \beta \in R^N$ тогда и только тогда, когда обратима матрица*

$$M = \left\{ \langle \mu_i, \mu_j \rangle \right\}_{i,j=1,\dots,N}.$$

$$\text{Управление } u_0 = \sum_{i=1}^N \gamma_i \mu_i,$$

где $\text{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_N) = M^{-1}[\beta - \ell G_r f - \ell X \alpha]$, решает задачу (8).

В качестве основной реализации пространства D мы будем рассматривать пространство $D = AC$ – пространство

абсолютно непрерывных функций $x: [0, T] \rightarrow R^n$. В этом случае имеем:

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(s) ds + x(0), \quad B = L - \text{пространство суммируемых по Лебегу функций}$$

$$z: [0, T] \rightarrow R^n, \|z\|_L = \int_0^T \|z(s)\|_{R^n} ds,$$

$$(\Lambda z)(t) = \int_0^t z(s) ds, Y = E, \delta x = \dot{x}, rx = x(0).$$

Здесь и всюду ниже E – единичная матрица. Изоморфизм между пространством AC и прямым произведением $L \times R^n$ играет основополагающую роль в теории функционально-дифференциальных уравнений и дает возможность сводить задачи в пространстве AC к задачам в пространстве L . Систематическое изложение теории краевых задач и задач управления в пространстве AC дано в [1].

Рассмотрим функционально-дифференциальную систему

$$(\mathcal{L}x)(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

где $\mathcal{L}: AC \rightarrow L$ – линейный ограниченный оператор с главной частью вида

$$(Qz)(t) = z(t) - \int_0^t K(t, s)z(s)ds.$$

Здесь элементы $k^{ij}(t, s)$ ядра $K(t, s)$ измеримы на множестве $\{(t, s): 0 \leq s \leq t \leq T\}$ и таковы, что на этом множестве

$$|k^{ij}(t, s)| \leq \kappa(t), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где функция $\kappa(\cdot)$ суммируема на $[0, T]$. Заметим, что системы вида (9) охватывают многие классы динамических моделей, включая дифференциальные системы с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы.

Пространство всех решений однородной системы

$$(\mathcal{L}x)(t) = 0, \quad t \in [0, T], \text{ имеет размерность } n.$$

Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ – базис в этом пространстве.

Матрица $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ называется

фундаментальной матрицей (будем для определенности считать, что $rx = E$). Главная

краевая задача $\mathcal{L}x = f, \quad rx = x(0) = \alpha$

однозначно разрешима при любых

$f \in L, \alpha \in R^n$, ее решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)\alpha + \int_0^t C(t, s)f(s)ds, \quad (10)$$

где $C(t, s)$ – матрица Коши.

Пусть $\ell: AC \rightarrow R^N$ – линейный ограниченный вектор-функционал. Имеет место

представление $\ell x = \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds + \Psi x(0)$, где

элементы измеримой $N \times n$ -матрицы Φ ограничены в существенном, а Ψ –

$N \times n$ – матрица с вещественными элементами.

Рассмотрим задачу управления

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}u + f, \quad x(0) = \alpha, \quad \ell x = \beta.$$

(11)

Здесь $\mathcal{F}: L_2 \rightarrow L$ – линейный ограниченный оператор, L_2 – пространство суммируемых с квадратом функций $u: [0, T] \rightarrow R^r$, в котором скалярное произведение определено равенством

$$\langle u, v \rangle = \int_0^T u^\perp(t)v(t)dt, \quad \text{где } \cdot^\perp - \text{сим-вол}$$

транспонирования. В задаче (11) цель управления задается вектор-функционалом $\ell: AC \rightarrow R^N$, который на траектории системы $\mathcal{L}x = \mathcal{F}u + f$ под действием управления должен принимать заданное значение β . Критерий разрешимости такой задачи управления дает приводимая ниже теорема. Для ее формулировки введем обозначения:

$$\Theta(s) = \Phi(s) + \int_s^T \Phi(\xi)C'_\xi(\xi, s)d\xi,$$

$$W = \int_0^T [\mathcal{F}^* \Theta](s) [\mathcal{F}^* \Theta]^\perp(s) ds,$$

$\mathcal{F}^*: L^* \rightarrow L_2^*$ – оператор, сопряженный к $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 2 ([6]). *Задача управления (11) разрешима тогда и только тогда, когда линейная алгебраическая система*

$$W \cdot \gamma = \beta - \int_0^T \Theta(s)f(s)ds - \Psi \cdot \alpha \quad (12)$$

разрешима относительно N -вектора γ . Каждое решение γ_0 системы (12)

определяет управление, решающее задачу (11):

$$u(t) = [\mathcal{F}^* \Theta]^\perp(t) \cdot \gamma_0. \quad (13)$$

3. Зависимость управляющей программы от запаздывания

Опишем зависимость управления и расходов на него (по норме пространства L_2) от запаздывания для случая классической задачи управления (перевод из начального состояния $x(0) = 0$ в конечное состояние $x(T) = \beta$), считая запаздывание τ в цепи управления постоянным:

$$Lx = F u; \quad x(0) = 0; \quad x(T) = \beta, \quad (14)$$

где $(F u)(t) = F(t)(Tu)(t)$,

$$(T u)(t) = \begin{cases} u(t - \tau), & t \in [\tau, T], \\ 0, & t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

Для задачи (14) матрица $\Theta(s) = C(T, s)$, и для построения управления (13) остается

найти сопряженный оператор $F^*: L^* \rightarrow L^*$.

Используя равенство

$$\int_{\tau}^T z^{\perp}(t)F(t)u(t-\tau)dt = \int_0^T \chi_{[0,T-\tau]}(s)[z^{\perp}(s+\tau)F(s+\tau)]u(s)ds,$$

получаем

$$(F^*z)(s) = \chi_{[0,T-\tau]}(s)F^{\perp}(s+\tau)z(s+\tau).$$

Отсюда для «матрицы управления»

$W = W(\tau)$ имеем представление

$$W = \int_0^T \chi_{[0,T-\tau]}^2(s)C(T,s+\tau)F(s+\tau)F^{\perp}(s+\tau)C^{\perp}(T,s+\tau)ds = \\ = \int_0^{T-\tau} C(T,s+\tau)F(s+\tau)F^{\perp}(s+\tau)C^{\perp}(T,s+\tau)ds.$$

Таким образом, задача (14) разрешима для всех таких $\tau \in [0, T]$, что $\det W(\tau) \neq 0$. Управляющая программа определяется равенством (13):

$$u_{\tau}(t) = \begin{cases} F^{\perp}(t+\tau)C^{\perp}(T,t+\tau)W^{-1}(\tau)\beta, & t \in [0, T-\tau]; \\ 0, & t \in (T-\tau, T]. \end{cases}$$

«Расходы на управление» $S(\tau)$, как функцию параметра τ , оцениваемые по норме пространства L_2 , можно вычислить:

$$S(\tau) = \|u_{\tau}\| = \left\{ \int_0^T u_{\tau}^{\perp}(t)u_{\tau}(t)dt \right\}^{1/2}.$$

Очевидно, характер этой зависимости определяется конкретными особенностями системы управления – матрицей Коши $C(t, s)$, матрицей $F(t)$ и целевыми значениями компонент требуемого финального состояния β .

4. Иллюстрирующий пример

Рассмотрим систему управления с запаздыванием по состоянию и по управлению

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t-1); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t-\tau), \quad t \in [0, 3]; \\ x_1(0) &= 0; \quad x_2(0) = 0; \quad x_1(3) = \beta_1; \quad x_2(3) = \beta_2; \\ x_2(\xi) &= 0, \quad u(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0. \end{aligned}$$

Для этого случая имеем $F(t) = \text{col}(0, 1)$, $r=1$, матрица Коши определяется равенством [7]

$$C(t, s) = \begin{pmatrix} 1 - \int_s^t \chi_{[1,3]}(\xi)\chi_{[0,\xi-1]}(s)\exp(1-\xi+s)d\xi \\ 0 \quad \exp(s-t) \end{pmatrix}.$$

Вычисляя интеграл, определяющий элемент $c_{12}(t, s)$, для $J(s) = c_{12}(3, s)$ получаем

$$J(s) = \begin{cases} 1 - e^{s-2}, & s \in [0, 2], \\ 0, & s \in (2, 3]. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } C(3, s) = \begin{pmatrix} 1 & J(s) \\ 0 & e^{s-3} \end{pmatrix},$$

$$W(\tau) = \int_0^{2-\tau} \begin{pmatrix} J^2(s+\tau) & J(s+\tau)e^{s+\tau-3} \\ J(s+\tau)e^{s+\tau-3} & e^{2(s+\tau-3)} \end{pmatrix} ds + \\ + \int_{2-\tau}^{3-\tau} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{2(s+\tau-3)} \end{pmatrix} ds = \\ = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \tau + 2e^{\tau-2} - \frac{1}{2}e^{2(\tau-2)} & \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{2\tau-5} \\ \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{2\tau-5} & \frac{1}{2}[1 - e^{2(\tau-3)}] \end{pmatrix},$$

$$u_{\tau}(t) = (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ J(t+\tau) & e^{t+\tau-3} \end{pmatrix} W^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Приведем точное описание $S^2(\tau)$ для

$$\beta_1 = \beta_2 = 4:$$

$$\begin{aligned} S^2(\tau) &= 18(-10 + 14\tau - 20\tau e^{2\tau-6} + 6e^{-2} - 4e^{4\tau-10} - 3e^{4\tau-12} - \\ &- 28e^{\tau-2} - 9e^{2\tau-4} + 2e^{-1} + 16e^{2\tau-5} + 6e^{2\tau-6} + 4e^{\tau-5} - 4e^{-1}\tau - \\ &- 22e^{4\tau-11} - 2e^{-3} - 2e^{4\tau-9} + 8\tau e^{\tau-4} - e^{2\tau-8} - 4e^{2\tau-4}\tau + 4e^{3\tau-10} + \\ &+ 8\tau e^{3\tau-9} - e^{4\tau-8} + 16e^{\tau-2}\tau + 4e^{3\tau-7} - 4\tau^2 + 20e^{\tau-3} + 8e^{3\tau-6} - \\ &- 8e^{\tau-3}\tau - 12e^{\tau-4} + 2e^{4\tau-12}\tau + 2e^{4\tau-10}\tau + 4e^{2\tau-7}\tau + 4e^{4\tau-11}\tau - \\ &- 4e^{2\tau-5}\tau - 12e^{3\tau-9} - 8e^{2\tau-7} + 28e^{3\tau-8} + 4\tau^2 e^{2\tau-6} - 2e^{-2}\tau - \\ &- 8\tau e^{3\tau-8}) / (-9 + 12\tau - 32\tau e^{2\tau-6} + 6e^{-2} + 22e^{4\tau-10} - 25e^{4\tau-12} - \\ &- 24e^{\tau-2} - 10e^{2\tau-4} + 28e^{2\tau-6} - e^{-4} - 10e^{2\tau-8} - 4\tau^2 e^{4\tau-12} - \\ &- 4e^{2\tau-4}\tau - 8e^{3\tau-10} - 16e^{6\tau-16} - e^{4\tau-8} - 40e^{5\tau-14} + 16e^{\tau-2}\tau - \\ &- 4\tau^2 + 8e^{3\tau-6} + 8e^{\tau-4} + 20e^{4\tau-12}\tau + 4e^{4\tau-10}\tau + 4\tau e^{2\tau-8} + \\ &+ 64e^{3\tau-8} + 16\tau e^{5\tau-14} + 8\tau^2 e^{2\tau-6} - 4e^{-2}\tau - 8e^{5\tau-12} - 32\tau e^{3\tau-8}) \end{aligned}$$

Вид зависимости $S(\tau)$ представлен на рис. 1.

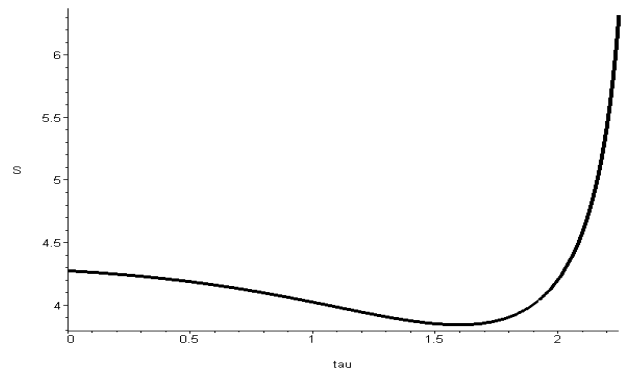


Рис. 1.

Заметим, что в точке $\tau_0 \in [2, 390; 2, 391]$ $\det W(\tau_0) = 0$ и задача управления решения не имеет.

5. Система с дискретным временем

При экономико-математическом моделировании динамические модели с дискретным временем часто возникают как

результат эконометрического моделирования на базе реальной статистической информации.

Рассмотрим неавтономную систему

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^t A(t,i)x(i) + f(t+1), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (15)$$

где $x(t) \in R^n, t = 0, \dots, T$, $A(t,i)$ - $n \times n$ -матрицы.

Данная система, дополненная начальными условиями $x(0) = \alpha$, имеет единственное решение. В частном случае $A(t,i) = A(i) \forall t$ коэффициенты системы (15) могут быть результатом стандартных процедур эконометрического моделирования.

В составе экономико-математической модели система (15) учитывает лишь динамические связи переменных, не включая в себя статические ограничения, такие, например, как балансовые ограничения.

Добавление в модель даже линейных статических ограничений вида

$$Bx \leq d, \quad (16)$$

где B - матрица размерности $m \times nT$, d - вектор-столбец размерности m , а

$x = \text{col}(x^T(0), x^T(1), \dots, x^T(T))$, может привести к тому, что система (15)-(16) окажется несовместной.

В этом случае возникает задача коррекции построенной модели. Систематическая теория таких задач изложена в [3,4]. Одной из причин корректировки может служить тот факт, что коэффициентами системы (15), построенной в результате эконометрического моделирования, являются не точные фактические коэффициенты, а их оценки, полученные по статистической информации. Поэтому задачу коррекции можно поставить в форме отыскания таких поправок h к данным коэффициентам, которые приведут к совместности системы (15)-(16) в целом. При этом имеет смысл следить за тем, чтобы измененные коэффициенты попали в доверительные интервалы, построенные для фактических значений коэффициентов модели по исходным оценкам.

Коррекцию ограничений (16) можно проводить также в виде введения штрафа за их нарушение.

Приведем систему (15) к виду, удобному для коррекции, - запишем ее в виде:

$$x = Px + F, \quad (17)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A(0,0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A(1,0) & A(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(T-1,0) & A(T-1,1) & \dots & A(T-1,T-1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \text{col}\left(\underbrace{0, \dots, 0}_n, f^T(1), \dots, f^T(T)\right).$$

Введя обозначение

$$K = (E_{n(T+1)} - P) = \begin{pmatrix} E_n - E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A(0,0) & E_n & 0 & 0 & 0 \\ -A(1,0) & -A(1,1) & E_n & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A(T-1,0) & -A(T-1,1) & \dots & -A(T-1,T-1) & E_n \end{pmatrix},$$

запишем (17) в виде

$$Kx = F. \quad (18)$$

В результате приходим к системе (18),(16), для которой в качестве коррекции может быть применен метод параметризации, разработанный И.И. Ереминым и А.А. Ватолиным [3,4]. Параметризованная система, соответствующая системе (18),(16), запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} (K + H_1)x = F - p_1 \\ (B + H_2)x \leq d - p_2 \end{cases}, \quad (19)$$

где $H_1 = \{h_{ji}\}_{nT, nT}$,

$$p_1 = \text{col}(h_{1, nT+1}, \dots, h_{nT, nT+1}),$$

$$H_2 = \{h_{ji}\}, j = nT+1, \dots, nT+m, i = 1, \dots, nT,$$

$$p_2 = \text{col}(h_{nT+1, nT+1}, \dots, h_{nT+m, nT+1}).$$

Количество параметров системы (19) составит $(nT+m)(nT+1)$. Так как для системы (16) коэффициенты матрицы B строго определены, коррекцию, как уже говорилось выше, можно проводить лишь в форме штрафов за отклонения от выполнения ограничений, т.е. корректируя параметры p_2 , при этом матрица H_2 будет нулевой. В силу специфического вида матрицы K число параметров будет совпадать с общим числом элементов матриц $A(t,i)$. Таким образом, вектор параметров h рассматриваемой модели будет иметь размерность $m + \frac{(T+1)T}{2}n^2$.

Для системы (19) ставится следующая задача аппроксимации:

$$\inf \{ \Phi(h) | h \in M \cap S \}, \quad \text{где } S -$$

допустимое множество параметров, M – множество параметров, для которых параметризованная система (19) имеет решение, $\Phi(h)$ – функция качества аппроксимации. Решение этой задачи дает оптимальный с точки зрения критерия $\Phi(h)$ вектор коррекции h .

Список литературы

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последствием. М.: Наука, 1992. 240с.
3. *Ватолин А.А.* О симметрической аппроксимации несобственных задач линейного программирования // Несобственные задачи оптимизации. Свердловск, 1982. С. 67–74.
4. *Еремин И.И.* Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988.
5. *Максимов В.П., Румянцев А.Н.* Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Известия вузов. Математика. 1993. № 5. С. 56–71.
6. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. N. Y: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314p.
7. *Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F.* Theory of linear abstract functional differential equations and applications // Memoirs on Diff. Equations and Math. Phys. 1996.V. 8. P. 1–102.
8. *Maksimov V.P.* Theory of functional differential equations and some problems in economic dynamics // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications. N. Y: Hindawi Publishing Corporation. 2006. P. 74–82.
9. *Maksimov V.P.* On the property of controllability with respect to a family of linear functionals // Functional Differential Equations. 2009. V. 16 (dedicated to the memory of Michael Drakhlin), № 3. P. 517–527.