РАЗДЕЛ II. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 330.4

ГИБРИДНЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В.П. Максимов, д. ф.-м. наук, проф. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
А.Л. Чадов, асп. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
ГОУ ВПО «Пермский государственный университет», 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
Электронный адрес: maksimov@econ.psu.ru

Динамические модели, рассматриваемые в этой работе, с одной стороны, представляют собой конкретную реализацию абстрактных функционально-дифференциальных уравнений. С другой стороны, они охватывают широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом эффектов последействия (запаздывания) и импульсных возмущений (шоков), приводящих к скачкообразному изменению основных показателей функционирования изучаемой системы. Рассматриваемые модели содержат одновременно как уравнения, описывающие динамику показателей в непрерывном времени на конечном промежутке, так и уравнения с дискретным временем, характерным для эконометрических моделей. Для указанного класса систем исследуется вопрос о представлении решений, даются постановки краевых задач как задач о достижимости заданных значений показателей, задач управления и приводятся условия разрешимости этих задач в форме, допускающей эффективное исследование с использованием современных компьютерных технологий.

Ключевые слова: модели экономической динамики; гибридные модели; краевые задачи; задачи целевого управления; вычислительный эксперимент.

Введение

В современных исследованиях по математической экономике все более ощущается потребность в более совершенных математических моделях. Это было предсказано В. Леонтьевым еще в 1953 г. [12, с.101]: «Некоторые из структурных отставаний (лагов), встречающихся в текущих описаниях эмпирических взаимоотношений между затратами производства и выпуском продукции, включают, например, наличие причинности, действующей в промежутке времени – некоторого мистического взаимоотношения, которое при более тонком и детальном рассмотрении может свестись к интуитивно более удовлетворительной и математически более удобной дифференциальной формулировке».

Наиболее популярным в теоретических и прикладных исследованиях является класс моделей динамики с дискретным временем и постоянными параметрами (коэффициентами). В линейном случае такая модель имеет вид системы разностных уравнений:

$$z(t_i) = \sum_{j=1}^{i-1} B_j z(t_j) + \sum_{k=1}^{i} F_k u(t_k) + f(t_i), \quad i = 0,1,\dots,\mu, \qquad (1)$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\mu = T$, векторная переменная $z = \mathrm{col}(z_1,\dots,z_n)$ (набор эндогенных переменных) описывает состояние моделируемой системы в моменты времени t_i; $u = \mathrm{col}(u_1,\dots,u_r)$ – набор экзогенных (в том числе управляющих) переменных, предыстория всех переменных считается заданной:

$$z(\xi) = \varphi(\xi),\ u(\xi) = \psi(\xi), \text{ если } \xi < 0.$$

Основная причина наибольшей распространенности моделей (1) – детально разработанная теория идентификации таких моделей — эконометрика. В рамках эконометрического подхода получены ответы на многие вопросы, имеющие прямое отношение к обоснованию и оценке возможностей практического применения моделей векторной авторегрессии (VAR) [см., напр.:28], разработаны методы построения оптимальных точечных и интервальных оценок параметров (элементов матриц B_j, F_k) системы

(1), процедуры проверки гипотез о значимости этих параметров и требования к исходным данным, которые используются для идентификации модели. Принципиальный момент здесь — гипотеза о постоянстве параметров модели. Модели вида (1) составляют основу инструментария информационно-аналитических систем (ИАС), разрабатываемых компанией «Прогноз» (г. Пермь) [3, с.60-164; 6].

Вопросы построения моделей с дискретным временем и переменными коэффициентами рассматриваются в рамках теории протомоделей, построенной В.Д. Фурасовым [21]. При этом из множества моделей, совместимых с наблюдаемыми вход-выходными последовательностями, выделяются подмножества моделей, обладающие специальными свойствами, и синтезируются уравнения протомоделей, порождающих соответствующие подмножества моделей исследуемой системы. Эти модели используются, в частности, для исследования так называемых индексов развития динамических процессов и корректной формализации понятий спада и подъема.

Задача построения моделей с непрерывным временем при условии непрерывных наблюдений может решаться на основе идеи операторной интерполяции, высказанной Н.В. Азбелевым в 1988 г. Таким задачам в рамках функционально-дифференциальных моделей с последействием посвящен цикл работ С.Ю. Култышева и Л.М. Култышевой [9, 10, 11]. Отметим также новый подход к построению дифференциальных уравнений произвольных динамических процессов, предлагаемый в работе [19].

Оставляя в стороне вопросы обоснования выбора и построения упомянутых моделей, мы сосредоточимся на проблеме синтеза моделей с дискретным временем и функционально-дифференциальных моделей с непрерывным временем. Один из основных аспектов этой проблемы — возможность использовать в полной мере отдельно полученные к настоящему времени теоретические результаты для функционально-дифференциальных моделей [1, 2, 27] и для моделей в форме разностных уравнений [4, 5, 24]. Термин «гибридные» по отношению к системам уравнений и моделям используется достаточно широко и нередко в различных смыслах [см., напр.: 22, 23, 15, 16, 17]. В нашем случае он кажется вполне уместным. Напомним, что «гибрид» (от лат. hibrida – помесь) — организм, полученный в результате скрещивания генетически различающихся родительских форм (видов, линий и др.)» [20]. Вопрос о существенности генетических различий разностных уравнений и уравнений дифференциальных (и их обобщений) имеет философский подтекст. Приведем в связи с этим высказывание А.Н. Колмогорова: «Весьма вероятно, что с развитием современной вычислительной техники будет понятно, что в очень многих случаях разумно изучение реальных явлений вести, избегая промежуточный этап их стилизации в духе представлений математики бесконечного и непрерывного, переходя прямо к дискретным моделям» [8, с.28].

Динамические модели, рассматриваемые в этой работе, с одной стороны, представляют собой конкретную реализацию абстрактных функционально-дифференциальных уравнений. С другой стороны, они охватывают широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом эффектов последействия (запаздывания) и импульсных возмущений (шоков), приводящих к скачкообразному изменению основных показателей функционирования изучаемой системы. Рассматриваемые модели содержат одновременно как уравнения, описывающие динамику показателей в непрерывном времени на конечном промежутке, так и уравнения с дискретным временем, характерным для эконометрических моделей. Для указанного класса систем исследуется вопрос о представлении решений, ставятся краевые задачи о достижимости заданных значений показателей, задачи управления и приводятся условия неразрешимости этих задач в форме, допускающей эффективное исследование с использованием современных компьютерных технологий.

1. Предварительные сведения. Функционально-дифференциальные уравнения с импульсным воздействием

Приведем здесь необходимые для дальнейшего сведения из [1, 2, 26, 27].

Обозначим через $L^n = L^n[0,T]$ пространство суммируемых функций $v:[0,T] \to R^n$ с нормой $\|v\|_{L^n} = \int\limits_0^T |v(s)|_n ds$, где $|\cdot|_n$ — норма в R^n (далее, если размерность пространства очевидна, индекс у нормы будем опускать).

Зафиксируем отрезок $[0,T] \subset R$ и конечное множество точек $\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < T$ и, следуя А.В. Анохину [7], введем пространство $DS^n(m)$ кусочно абсолютно непрерывных функций $y:[0,T] \to R^n$, представимых в виде

$$y(t) = \int_0^t v(s)ds + y(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[\tau_k, T]}(t) \Delta y(\tau_k), \quad (2)$$

где $v \in L^n$, $\Delta y(\tau_k) = y(\tau_k) - y(\tau_k - 0)$,

$\chi_{[\tau_k,T]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[\tau_k,T]$.

Элементы пространства $DS^n(m)$ — это функции, абсолютно непрерывные на каждом из промежутков $[0,\tau_1),[\tau_1,\tau_2),\ldots,[\tau_m,T]$ и непрерывные справа в точках $\tau_1,\ldots,\tau_m$.

Если норма в $DS^n(m)$ определяется равенством

$$\|y\|_{DS^n(m)}=\|\dot y\|_{L^n}+|y(0)|_n+\sum_{k=1}^{m}|\Delta y(\tau_k)|_n,$$

то $DS^n(m)$ — банахово пространство.

Сделаем несколько замечаний об изучении импульсных систем с использованием пространства $DS^n(m)$. Подход к изучению дифференциальных уравнений с разрывными решениями связан с теорией так называемых «обобщенных дифференциальных уравнений», предложенной J. Kurzweil [29]. К настоящему времени эта теория хорошо разработана [см., напр.: 32, 25]. Согласно принятому подходу импульсные уравнения рассматриваются в классе функций ограниченной вариации. В этом случае под решением понимается функция ограниченной вариации, удовлетворяющая интегральному уравнению с интегралом Лебега-Стильтьеса или Перрона-Стильтьеса. Интегральные уравнения в пространствах функций ограниченной вариации представляют интерес сами по себе и детально изучаются [см. 33]. Напомним, что функция ограниченной вариации представима в виде суммы абсолютно непрерывной функции, разрывной функции и сингулярной компоненты (непрерывной функции с производной, равной нулю почти всюду). Решения уравнений со скачками, рассматриваемые ниже, не содержат сингулярной компоненты и могут терпеть разрывы только в конечном числе заданных точек. Эти уравнения рассматриваются в пространстве $DS^n(m)$ – конечномерном расширении традиционного пространства абсолютно непрерывных функций. Такой подход к уравнениям со скачками был предложен в [7]. Он не использует сложную теорию обобщенных функций и находит много приложений в тех случаях, когда вопрос о сингулярной компоненте не возникает.

Рассмотрим в пространстве $DS^n(m)$ уравнение [14]:

$$\dot y(t)=\int_0^t K^1(t,s)\dot y(s)ds+A_0^1(t)y(0)+\sum_{k=1}^{m}A_k^1(t)\Delta y(\tau_k)+f(t),\ t\in[0,T]. \tag{3}$$

Здесь элементы $k_{ij}^1(t,s)$ ядра $K^1(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s):0\le s\le t\le T\}$ и имеют общую, суммируемую на $[0,T]$, мажоранту:

$$\left|k_{ij}^1(t,s)\right|\le \kappa(t)\quad i,j=1,\ldots,n,\ t\in[0,T],$$

а $(n\times n)$-матрицы $A_0^1,\ldots,A_m^1$ имеют суммируемые на $[0,T]$ элементы. Уравнение (3) охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным или распределенным запаздыванием и интегродифференциальные системы Вольтерра.

Напомним [1, 2], что пространство $DS^n(m)$ изоморфно прямому произведению $L^n\times R^{n+mn}$, изоморфизм $J=\{\Lambda,\Theta\}:L^n\times R^{n+mn}\to DS^n(m)$ задается равенствами

$$(\Lambda v)(t)=\int_0^t v(s)ds;\quad (\Theta\beta)(t)=\Theta(t)\beta,$$

где $\Theta(t)=\left(E_n,E_n\cdot\chi_{[\tau_1,T]}(t),\ldots,E_n\cdot\chi_{[\tau_m,T]}(t)\right)$, $\beta\in R^{n+mn}$, E_n – единичная $(n\times n)$-матрица. Обратный оператор $J^{-1}=[\delta,r]:DS^n(m)\to L^n\times R^{n+mn}$ определяется равенствами

$$\delta y=\dot y;\quad ry=\mathrm{col}(y(0),\Delta y(\tau_1),\ldots,\Delta y(\tau_m)).$$

Тогда

$$y=\Lambda\delta y+\Theta ry. \tag{4}$$

Уравнение (3) является частным случаем линейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ)

$$\mathcal{L}y=\varphi, \tag{5}$$

где $\mathcal{L}:DS^n(m)\to L^n$ – линейный ограниченный оператор. Применяя оператор $\mathcal{L}$ к обеим частям равенства (4), получим

$$\mathcal{L}y=(\mathcal{L}\Lambda)\delta y+(\mathcal{L}\Theta)ry=Q\delta y+\tilde A ry=f. \tag{6}$$

Оператор $Q=\mathcal{L}\Lambda:L^n\to L^n$ называют главной частью оператора $\mathcal{L}$, а $\tilde A=\mathcal{L}\Theta:R^{n+mn}\to L^n$ — конечномерной частью оператора $\mathcal{L}$. В уравнении (3) оператор Q является вольтерровым:

$$(Qv)(t)=v(t)-\int_0^t K^1(t,s)v(s)ds$$

и обратимым. Обратный оператор Q^{-1} имеет представление

$$(Q^{-1}f)(t)=f(t)+\int_0^t R(t,s)f(s)ds,$$

где $R(t,s)$ – резольвентное ядро, соответствующее ядру $K^1(t,s)$. Оператор $\tilde A$ в (6) для уравнения (3) задается матрицей $\tilde{A} = (-A_0^1, -A_1^1, \ldots, -A_m^1)$.

Получим представление решения уравнения (3). Применим Q^{-1} к обеим частям последнего равенства в выражении (6):

$$\delta y = Q^{-1} f - Q^{-1} \tilde{A} r y$$

и проинтегрируем полученное равенство от 0 до t:

$$\int_0^t (\delta y)(s) ds = \int_0^t (Q^{-1} f)(s) ds - \int_0^t (Q^{-1} \tilde{A})(s) ds \cdot r y.$$

Так как $\int_0^t (\delta y)(s) ds = \Lambda \delta y = y - \Theta r y$, то

$$y(t) = \left(\Theta(t) - \int_0^t (Q^{-1} \tilde{A})(s) ds \right) r y + \int_0^t (Q^{-1} f)(s) ds = \\ = \left(\Theta(t) + X(t) \right) r y + \int_0^t (Q^{-1} f)(s) ds. \qquad (7)$$

Каждый столбец $x_i(t)$ $(n \times (n + mn))$-матрицы

$$X(t) = -\int_0^t (Q^{-1} \tilde{A})(s) ds = -\int_0^t \left\{ \tilde{A}(s) + \int_0^s R(s,\tau) \tilde{A}(\tau) d\tau \right\} ds$$

является решением задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \int_0^t K^1(t,s) \dot{x}(s) ds - \tilde{a}_i(t), \\ x(0) = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (8)$$

где $\tilde{a}_i(t)$ – i-й столбец матрицы $\tilde{A}$.

Однородное уравнение (3) $(f(t) = 0, t \in [0,T])$ в силу представления (7) имеет фундаментальную матрицу $Y(t)$ размерности $n \times (n + mn)$:

$$Y(t) = \Theta(t) + X(t).$$

Решение уравнения (3) с начальными условиями

$$y(0) = 0, \Delta y(\tau_1) = 0, \ldots, \Delta y(\tau_m) = 0$$

имеет представление

$$y(t) = \int_0^t \left(Q^{-1} f \right)(s) ds = \left(C_1 f \right)(t) = \int_0^t C_1(t,s) f(s) ds,$$

где $C_1(t,s)$ — матрица Коши [12, 13]. Эта матрица является решением матричного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} C_1(t,s) = \int_s^t K^1(t,\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C_1(\tau,s) d\tau + K^1(t,s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

с условием $C_1(s,s) = E_n$.

Матрица $C_1(t,s)$ выражается через резольвентное ядро $R(t,s)$:

$$C_1(t,s) = E_n + \int_s^t R(\tau,s) d\tau.$$

В самом деле,

$$\int_0^t C_1(t,s) f(s) ds = \int_0^t \left(Q^{-1} f \right)(s) ds = \int_0^t \left\{ f(s) + \int_0^s R(s,\tau) f(\tau) d\tau \right\} ds = \\ = \int_0^t f(s) ds + \int_0^t \int_\tau^t R(s,\tau) ds \, f(\tau) d\tau = \int_0^t \left\{ E_n + \int_s^t R(\tau,s) d\tau \right\} f(s) ds.$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y(t) = Y(t)\alpha + \int_0^t C_1(t,s) f(s) ds, \qquad (9)$$

где $\alpha \in R^{n+mn}$ – произвольный вектор. Это представление позволяет свести исследование краевых задач и задач управления к исследованию систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим общую линейную краевую задачу для уравнения (3):

$$\dot{y}(t) = \int_0^t K^1(t,s) \dot{y}(s) ds + A_0^1(t) y(0) + \\ + \sum_{k=1}^m A_k^1(t) \cdot \Delta y(\tau_k) + f(t), \; t \in [0,T], \qquad (10) \\ \ell y = \gamma,$$

где $\ell : DS^n(m) \to R^{n+mn}$ — линейный ограниченный вектор-функционал. Всякий такой вектор-функционал имеет представление

$$\ell y = \int_0^T \Phi(s) \dot{y}(s) ds + \Psi_0 \cdot y(0) + \sum_{k=1}^m \Psi_k \cdot \Delta y(\tau_k).$$

Здесь элементы $((n + mn) \times n)$-матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном, $\Psi_0, \ldots, \Psi_m$ — постоянные $((n + mn) \times n)$-матрицы.

Применяя вектор-функционал ℓ к обеим частям (9), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора α:

$$\ell y = \ell Y \alpha + \ell \left\{ \int_0^{(\cdot)} C(\cdot,s) f(s) ds \right\} = \gamma.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости краевой задачи (3), (9) имеет вид:

$$\det \ell Y \neq 0.$$

Рассмотрим задачу управления

$$\dot{y}(t) = \int_0^t K^1(t,s) \dot{y}(s) ds + A_0^1(t) y(0) + \sum_{k=1}^m A_k^1(t) \cdot \Delta y(\tau_k) + \\ + (F u)(t) + f(t), \quad t \in [0,T] \qquad (11)$$

$$y(0) = \alpha_0, \quad \ell y = \gamma \in R^N. \qquad (12)$$

В уравнении (11) $F : L_2^r[0,T] \to L^n[0,T]$ – линейный ограниченный оператор, L_2^r – пространство функций $u:[0,T]\to R^r$, суммируемых с квадратом, с нормой $\|u\|_{L_2^r}=\sqrt{<u,u>}$, где $<u,v>=\int\limits_0^T u^{\mathrm{T}}(s)v(s)ds$, $\cdot^{\mathrm{T}}$ – знак транспонирования.

Запишем решение уравнения (11), используя формулу (9):

$$y(t)=Y(t)\cdot\operatorname{col}(\alpha_0,\sigma)+\int\limits_0^t C_1(t,s)f(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t C_1(t,s)\big(F\ \ u\big)(s)ds,$$

где $\sigma=\operatorname{col}\big(\Delta y(\tau_1),\ldots,\Delta y(\tau_m)\big)$. Применим к последнему равенству вектор-функционал ℓ:

$$\ell y=\ell\{Y(\cdot)\}\operatorname{col}(\alpha_0,\sigma)+\ell\left\{\int\limits_0^{(\cdot)} C_1(\cdot,s)f(s)ds\right\}+$$
$$+\ell\left\{\int\limits_0^{(\cdot)} C_1(\cdot,s)\big(F\ \ u\big)(s)ds\right\}.$$

Для первого слагаемого имеем:

$$\ell\{Y(\cdot)\}\operatorname{col}(\alpha_0,\sigma)=\left\{\int\limits_0^T\Phi(\tau)\dot{Y}(\tau)d\tau+\Psi_0Y(0)+\sum_{k=1}^m\Psi_k[Y(\tau_k)-Y(\tau_k-0)]\right\}\times$$
$$\times\operatorname{col}\{\alpha_0,\sigma\}=\Xi_1\cdot\alpha_0+\Xi_2\cdot\Delta y+\Psi_0\alpha_0+\sum_{k=1}^m\Psi_k\Delta y(\tau_k),$$

где $(N\times(n+mn))$-матрица

$\Xi=\int\limits_0^T\Phi(\tau)\dot{Y}(\tau)d\tau=\big(\Xi_1,\Xi_2\big)$, Ξ_1 — $(N\times n)$-матрица, состоящая из первых n столбцов матрицы Ξ, для второго слагаемого имеем:

$$\ell\left\{\int\limits_0^{(\cdot)} C_1(\cdot,s)f(s)ds\right\}=\int\limits_0^T\Phi(\tau)\left\{\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}C(\tau,s)f(s)ds+f(\tau)\right\}d\tau=$$
$$=\int\limits_0^T\Phi(s)f(s)ds+\int\limits_0^T\int\limits_s^T\Phi(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}C(\tau,s)d\tau\cdot f(s)ds=\int\limits_0^T V(s)f(s)ds,$$

где $V(s)=\Phi(s)+\int\limits_s^T\Phi(\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}C(\tau,s)d\tau$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}&\big[\Xi_2+\big(\Psi_1,\ldots,\Psi_m\big)\big]\sigma+\int\limits_0^T V(s)\big(F\ \ u\big)(s)ds=\\&=\gamma-\int\limits_0^T V(s)f(s)ds-\big(\Xi_1+\Psi_0\big)\alpha_0.\end{aligned}\qquad(13)$$

Запишем $\int\limits_0^T V(s)(F\ \ u)(s)ds$ в виде

$$\int\limits_0^T(F^{\ *}V)(s)\cdot u(s)ds,$$

где $F^{\ *}:\big(L_1^n\big)^*\to\big(L_2^r\big)^*$ – сопряженный к F оператор.

Будем искать управление $\bar{u}$ в виде линейной комбинации $\bar{u}=[F^{\ *}V]^{\mathrm{T}}(s)d=\sum\limits_{i=1}^N d_iw_i$, где w_i — i-й столбец матрицы $[F^{\ *}V]^{\mathrm{T}}$. Напомним, что в силу теоремы об ортогональном разложении гильбертово пространство L_2^r можно представить как прямую сумму:

$$L_2^r=Sp(v_1,\ldots,v_N)\oplus Sp(v_1,\ldots,v_N)^{\perp},$$

где $Sp(v_1,\ldots,v_N)$ – линейная оболочка элементов $(v_1,\ldots,v_N)$, а $Sp(v_1,\ldots,v_N)^{\perp}$ — ее ортогональное дополнение. Запишем (13) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $(mn+N)$ — вектора $\operatorname{col}(\sigma,d)$, $\sigma\in R^{mn}$, $d\in R^N$:

$$\begin{aligned}&\big[\Xi_2+(\Psi_1,\ldots,\Psi_m)\big]\sigma+Md=\\&=\gamma-\int\limits_0^T V(s)f(s)ds-\big(\Xi_1+\Psi_0\big)\alpha_0,\end{aligned}\qquad(14)$$

где $(N\times N)$-матрица M определена равенством $M=\int\limits_0^T\big[F^{\ *}V\big](s)\cdot\big[F^{\ *}V\big]^{\mathrm{T}}(s)ds$.

Тогда разрешимость задачи управления (11) – (12) равносильна разрешимости системы (14) относительно вектора $\operatorname{col}(\sigma,d)$. Каждое решение $\operatorname{col}(\sigma_0,d_0)$, $\sigma_0=\operatorname{col}(\sigma_0^1,\ldots,\sigma_0^m)$, системы (14) определяет решение задачи (11) – (12), включающее управление $\bar{u}=\sum\limits_{i=1}^N d_{0i}w_i,\bar{u}\in L_2^r$, и скачки $\Delta y(\tau_k)=\sigma_0^k,k=1,\ldots,m$.

2. Предварительные сведения. Модели с дискретным временем

Зафиксируем множество $J=\{t_0,t_1,\ldots,t_\mu\}$, $0<t_1<\ldots<t_\mu=T$. Через $FD^{\nu}(\mu)$ обозначим пространство функций $z:J\to R^{\nu}$ с нормой:

$$\|z\|_{FD^{\nu}(\mu)}=\sum_{i=0}^{\mu}|z(t_i)|_{\nu}.$$

Рассмотрим в пространстве $FD^{\nu}(\mu)$ уравнение

$$z(t_i)=\sum_{j=0}^{i-1}B_{ij}^2z(t_j)+g(t_i),\quad i=1,\ldots,\mu,\qquad(15)$$

где B_{ij}^2 — постоянные $(\nu\times\nu)$-матрицы.

Для разностного уравнения (15) можно записать разностные аналоги определений, задач и утверждений п.1. [см.: 4].

Фундаментальная матрица однородного уравнения (15) $(g(t_i)=0,\quad i=0,\dots,\mu)$ является решением начальной задачи

$$Z(t_i)=\sum_{j=0}^{i-1}B_{ij}^2 Z(t_j),\quad i=1,\dots,\mu,\quad Z(t_0)=E_\nu.$$

Матрица Коши $C_2(i,j)$ определяется рекуррентными соотношениями

$$C_2(i,j)=E_\nu+\sum_{k=j}^{i-1}B_{ik}^2 C_2(k,j),\quad 1\le j\le i\le \mu,$$

и дает представление решения уравнения (11) при условии $z(t_0)=0$:

$$z(t_i)=(C_2 g)(t)=\sum_{j=1}^{i}C_2(i,j)g(t_j),\ j=1,\dots,\mu. \qquad (16)$$

Как обычно, здесь и далее будем считать, что $\sum_{i=k}^{l}F_i=0$ для любых F_i, если $l<k$.

Таким образом, общее решение уравнения (15) имеет вид

$$z(t_i)=Z(t_i)\beta+\left(C_2 g\right)(t_i),\quad i=0,\dots,\mu, \qquad (17)$$

где $\beta\in R^\nu$ – произвольный вектор.

Представление (17), как и его аналог для функционально-дифференциального уравнения (9), позволяет свести вопрос о разрешимости краевой задачи и задачи управления к исследованию систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим общую линейную краевую задачу для уравнения (15):

$$\begin{gathered}z(t_i)=\sum_{j=0}^{i-1}B_{ij}^2 z(t_j)+g(t_i),\quad i=1,\dots,\mu,\\ \lambda z=\gamma,\end{gathered} \qquad (18)$$

где $\lambda: FD^\nu(\mu)\to R^\nu$ — линейный ограниченный вектор-функционал. Всякий такой вектор-функционал имеет представление:

$$\lambda z=\sum_{k=0}^{\mu}\Gamma_k z(t_k),$$

где $\Gamma_k,\ k=0,1,\dots,\mu$ — постоянные $(\nu\times\nu)$-матрицы.

Применяя вектор-функционал λ к обеим частям равенства (17), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора β:

$$\lambda z=\sum_{k=0}^{\mu}\Gamma_k Z(t_k)\beta+\sum_{k=0}^{\mu}\Gamma_k\left(C_2 g\right)(t_k)=\gamma$$

и критерий её однозначной разрешимости $\forall\beta\in R^\nu$:

$$\det\sum_{k=0}^{\mu}\Gamma_k Z(t_k)\ne 0.$$

Рассмотрим задачу управления

$$z(t_i)=\sum_{j=0}^{i-1}B_{ij}^2 z(t_j)+\left(Fu\right)(t_i)+g(t_i),\quad i=1,\dots,\mu, \qquad (19)$$

$$z(t_0)=\alpha,\quad \lambda z=\gamma\in R^N, \qquad (20)$$

где линейный ограниченный оператор $F: FD^\nu(\mu)\to FD^\nu(\mu)$ имеет представление:

$$\left(Fu\right)(t_i)=\sum_{k=1}^{i}F_k u(t_k),\quad i=1,\dots,\mu.$$

Все решения задачи Коши (задачи (19) с начальным условием $z(t_0)=\alpha$) имеют вид:

$$z(t_i)=Z(t_i)\alpha+\left(C_2 g\right)(t_i)+\left(C_2 Fu\right)(t_i).$$

Применяя к последнему равенству вектор-функционал λ, получаем

$$\lambda z=\lambda Z\alpha+\lambda C_2 g+\lambda C_2 Fu=\gamma.$$

Все управления, решающие задачу Коши, — это решения системы

$$\lambda C_2 Fu=\beta,$$

где $\beta=\gamma-\lambda Z\alpha-\lambda C_2 g$, относительно u:

$$\lambda C_2 Fu=\sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\sum_{j=1}^{i}C_2(i,j)\cdot\sum_{k=1}^{j}F_k u(t_k)=H\cdot U=\beta,$$

где H – матрица размерности $(N\times\rho\mu)$, $U=col(u(t_1),\dots,u(t_\mu))$ – вектор размерности $\rho\mu$, $\beta\in R^N$.

Будем искать управление в виде

$$U=H^{\mathrm{T}}d=\sum_{i=1}^{N}(H^{\mathrm{T}})_i\cdot d_i,$$

где $(H^{\mathrm{T}})_i$ – i-й столбец матрицы H^{T}.

Тогда критерий разрешимости задачи управления (19)–(20) имеет вид:

$$\det(HH^{\mathrm{T}})\ne 0.$$

3. Гибридные модели

Мы рассмотрели уравнение (3), описывающее динамику показателей, входящих в $y(t)$, в непрерывном времени на конечном промежутке, и уравнение с дискретным временем (15), характерное для эконометрических моделей. Запишем уравнения (3) и (15) в операторной форме:

$$\dot y=T_{11}y+f$$

$$z=T_{22}z+g$$

где $T_{11}: DS^n(m) \to L^n$; и $T_{22}: FD^\nu(\mu) \to FD^\nu(\mu)$ – линейные ограниченные операторы:

$$(T_{11}y)(t) = \int_0^t K^1(t,s)\dot{y}(s)ds + A_0^1(t)y(0) + \sum_{k=1}^{m} A_k^1(t)\Delta y(\tau_k), \ t \in [0,T], \qquad (T_{11})$$

$$(T_{22}z)(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} B_{ij}^2 z(t_j), \ i = 1,\dots,\mu. \quad (T_{22})$$

Введем связывающие операторы $T_{12}: FD^\nu(\mu) \to L^n$ и $T_{21}: DS^n(m) \to FD^\nu(\mu)$:

$$(T_{12}z)(t) = \sum_{\{j:t_j \le t-\Delta_1\}} B_j^1(t)z(t_j), \ t \in [0,T], \ (T_{12}),$$

где элементы матриц $B_j^1, j = 0,,\dots,\mu,$ суммируемы на $[0,T]$, $\Delta_1 \ge 0$;

$$(T_{21}y)(t_i) = \int_0^{t_i-\Delta_2} K_i^2(s)\dot{y}(s)ds + A_{i0}^2 y(0) + \sum_{k=1}^{m} A_{ik}^2 \Delta y(\tau_k), i = 0,1,\dots,\mu, \qquad (T_{21})$$

где элементы матриц K_i^2 измеримы и ограничены в существенном на $[0,T]$ и A_{ik}^2 – постоянные $(\nu \times n)$-матрицы, $i = 0,1,\dots,\mu,$ $k = 0,1,\dots,m,$ $\Delta_2 \ge 0$.

Рассмотрим систему, включающую одновременно уравнения обоих типов:

$$\dot{y} = T_{11}y + T_{12}z + f, \quad z = T_{21}y + T_{22}z + g. \qquad (21)$$

Систему (21) естественно назвать «гибридной» системой или системой непрерывно-дискретных функционально-дифференциальных уравнений.

Применим представления (9) и (17) к первому и второму уравнениям системы (21) соответственно:

$$y = Y\alpha + C_1T_{12}z + C_1 f, \quad z = Z\beta + C_2T_{21}y + C_2 g, \qquad (22)$$

или

$$\begin{pmatrix} I & -C_1T_{12} \\ -C_2T_{21} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

где I – единичный оператор в соответствующем пространстве.

Для получения представления общего решения системы (21) и записи равенств, определяющих фундаментальную матрицу и оператор Коши системы (21), решим (23) относительно вектора $x = col(y,z)$. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Пусть Δ_1 и Δ_2 в определении операторов T_{12} и T_{21} таковы, что

$$\Delta_1 + \Delta_2 \ne 0. \qquad (24)$$

Тогда оператор

$$P = \begin{pmatrix} I & -C_1T_{12} \\ -C_2T_{21} & I \end{pmatrix} : DS^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to \to DS^n(m) \times FD^\nu(\mu)$$

обратим.

Доказательство. Легко проверить, что линейный оператор $M = \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}$ с линейными операторами $A: Z \to Y$ и $B: Y \to Z$ (Y и Z – банаховы пространства) обратим, если оператор $(I - BA): Z \to Z$ имеет обратный оператор $(I - BA)^{-1}: Z \to Z$. При этом также существуют обратные операторы $(I - AB)^{-1}$ и

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (I - AB)^{-1} & -(I - AB)^{-1}A \\ -B(I - AB)^{-1} & (I - BA)^{-1} \end{pmatrix}.$$

В условиях леммы оператор $BA = C_2T_{21}C_1T_{12}: FD^\nu(\mu) \to FD^\nu(\mu)$ является τ-вольтерровым [13, с.106] оператором с $\tau = \Delta_1 + \Delta_2$ и, следовательно, нильпотентным оператором. Таким образом, спектральный радиус оператора BA равен нулю. □

В дальнейшем будем предполагать, что условие (24) выполнено. Тогда из (23) получаем

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \qquad (25)$$

где

$$H_{11} = (I - C_1T_{12}C_2T_{21})^{-1}; \ H_{12} = -(I - C_1T_{12}C_2T_{21})^{-1}C_1T_{12}; \quad H_{21} = C_2T_{21}(I - C_1T_{12}C_2T_{21})^{-1}; \ H_{22} = (I - C_2T_{21}C_1T_{12})^{-1}. \qquad (26)$$

Таким образом, общее решение $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in DS^n(m) \times FD^\nu(\mu)$ системы (21) имеет вид:

$$x = X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \qquad (27)$$

фундаментальная матрица X связана с фундаментальными матрицами Y и Z равенством

$$X = \begin{pmatrix} H_{11}Y & H_{12}Z \\ H_{21}Y & H_{22}Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Оператор Коши C выражается через операторы Коши C_1 и C_2 равенством

$$C = \begin{pmatrix} H_{11}C_1 & H_{12}C_2 \\ H_{21}C_1 & H_{22}C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

4. Краевые задачи для гибридных моделей

Общей линейной краевой задачей называется система (21) вместе с линейными ограничениями

$$\ell x = \ell \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \gamma, \ \gamma \in R^N, \qquad (30)$$

где $\ell : DS^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to R^N$ – линейный ограниченный вектор-функционал, имеющий представление:

$$\ell \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \int_0^T \Phi(s)\dot{y}(s)ds + \Psi_0 y(0) + \\ + \sum_{k=1}^{m} \Psi_k \Delta y(\tau_k) + \sum_{j=0}^{\mu} \Gamma_j z(t_j). \qquad (31)$$

Здесь Ψ_k, $k = 0,1,\ldots,m$ – постоянные $(N \times n)$-матрицы; Γ_j, $j = 0,1,\ldots,\mu$ – постоянные $(N \times \nu)$-матрицы; Φ – $(N \times n)$-матрица с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,T]$ элементами. Предполагается, что компоненты $\ell_i : DS^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to R$, $i = 1,\ldots,N$, вектор-функционала $\ell = col(\ell_1,\ldots,\ell_N)$ линейно независимы.

Отметим, что в виде выражения (31) может быть записана, в частности, совокупность начальных условий $y(0) = y_0$ и условий на величину скачков $y(\tau_k) = A(\tau_k)y(\tau_k - 0) + \gamma_k$ и др., встречающиеся во многих работах [см., напр.: 22].

При условии $N = n + mn + \nu$ краевая задача (21),(30) однозначно разрешима при любых f, g тогда и только тогда, когда $(N \times N)$-матрица

$$\ell X = \left(\ell X^1, \ldots, \ell X^{n+mn+\nu}\right), \qquad (32)$$

где X^j – j-й столбец X, невырождена, т. е.

$$\det \ell X \neq 0. \qquad (33)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1: Пусть $N = n + mn + \nu$. Тогда краевая задача (21),(30) однозначно разрешима при любых f, g тогда и только тогда, когда выполнено условие (33), где $(N \times N)$-матрица ℓX определяется равенствами (32),(31),(28),(26).

5. Задачи управления для гибридных моделей

Запишем гибридную систему (21) в виде

$$\delta x = \Theta x + \varphi, \qquad (34)$$

где $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in DS^n(m) \times FD^\nu(\mu)$,

$\varphi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L^n \times FD^\nu(\mu)$,

$\Theta = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$, $\delta x = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ z \end{pmatrix} : DS^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to$
$\to L^n \times FD^\nu(\mu)$

и рассмотрим гибридную систему управления

$$\delta x = \Theta x + Fu + \varphi. \qquad (35)$$

Здесь $u \in H$ – управление, H – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot,\cdot \rangle$, $F : H \to L^n \times FD^\nu(\mu)$ – линейный ограниченный оператор, отвечающий за реализацию управляющих воздействий на систему. Зафиксируем целевой вектор-функционал $\ell : DS^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to R^N$, представленный в виде (31). Назовем задачей управления относительно заданной системы ограниченных функционалов ℓ_j, $col(\ell_1,\ldots,\ell_N) = \ell$ для гибридной системы управления (35) задачу

$$\delta x = \Theta x + Fu + \varphi, \\ x(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in R^{n+\nu}; \ \ell x = \gamma \in R^N \qquad (36)$$

как задачу выбора такого управления $\bar{u} \in H$, что краевая задача

$$\delta x = \Theta x + F\bar{u} + \varphi, \\ x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \ \ell x = \gamma \qquad (37)$$

разрешима. Если такое управление существует для любых $\varphi \in L^n \times FD^\nu(\mu)$, $\alpha \in R^n$, $\beta \in R^\nu$, $\gamma \in R^N$, то гибридная система управления (35) называется управляемой относительно вектор-функционала ℓ.

Получим условия разрешимости задачи управления (36) используя равенство (27), дающее представление всех решений (35) с начальными условиями $y(0) = \alpha \in R^n$, $z(0) = \beta \in R^\nu$:

$$x = X\begin{pmatrix}\alpha\\ \sigma\\ \beta\end{pmatrix} + C\varphi + CFu. \qquad (38)$$

Здесь $\sigma = col\left(\Delta y(\tau_1),\ldots,\Delta y(\tau_m)\right) \in R^{mn}$ – произвольный вектор. Применяя вектор-функционал ℓ к обеим частям (38) и учитывая цель управления – доставление заданному функционалу ℓx значения $\gamma \in R^N$ на траекториях, определяемых системой (36), получаем уравнение

$$\ell X\begin{pmatrix}\alpha\\ \sigma\\ \beta\end{pmatrix} + \ell C\varphi + \ell CFu = \gamma \qquad (39)$$

относительно $\sigma \in R^{mn}$ и $u \in H$.

Сведем (39) к системе линейных алгебраических уравнений. Заметим, что поскольку $\lambda_j = \ell_j CF$ – линейный ограниченный функционал, определенный на гильбертовом пространстве H, то найдется такое $v_j \in H$, что $\lambda_j = \langle v_j, u\rangle$ (где $v_j = (CF)^* \ell_j$, знак $\cdot^*$ используется для обозначения сопряженного оператора).

Будем искать управление $\bar{u}$ в виде линейной комбинации

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{N} d_i v_i$$

(напомним, что гильбертово пространство H может быть представлено как прямая сумма $Sp(v_1,\ldots,v_N) \oplus \left[Sp(v_1,\ldots,v_N)\right]^{\perp}$, где $Sp(\cdot)$ – линейная оболочка соответствующих элементов). Получим, что

$$\ell CF\bar{u} = Vd, \qquad (40)$$

где $V = \left\{\langle v_i, v_j\rangle\right\}_{i,j=1,\ldots,N}$ – $(N \times N)$-матрица Грама для системы $v_1,\ldots,v_N \in H$.

Запишем матрицу ℓX в форме

$$\ell X = \left(\Xi_y \,|\, \Xi_\Delta \,|\, \Xi_z\right), \qquad (41)$$

где размерности матриц Ξ_y, Ξ_Δ, Ξ_z — $(N \times n)$, $(N \times (mn))$ и $(N \times \nu)$ соответственно.

Таким образом, вопрос о разрешимости задачи управления сведен к вопросу о разрешимости системы линейных алгебраических уравнений

$$\Xi_\Delta \sigma + Vd = \gamma - \ell C\varphi - \Xi_y \alpha - \Xi_z \beta \qquad (42)$$

Сформулируем этот результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2 (ср. с теоремой 2 [30]). *Задача управления (36) для гибридной системы управления (35) разрешима тогда и только тогда, когда система линейных алгебраических уравнений (42) разрешима относительно* $(mn+N)$*-вектора* $col(\sigma, d)$. *Каждое решение* $col(\sigma_0, d_0)$, $\sigma_0 = col(\sigma_0^1,\ldots,\sigma_0^m)$ *системы (42) определяет управление, решающее задачу (36), содержащее импульсы* $\Delta y(\tau_k) = \sigma_0^k$, $k = 1,\ldots,m$, *и управление* $\bar{u} \in H$, $\bar{u} = \sum_{j=1}^{N} d_{0j} v_j$.

6. Доказательный вычислительный эксперимент

Эффективное исследование поставленной задачи (краевой задачи (21),(30) или задачи гибридного управления (36)) основывается на исследовании системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), $\ell X \cdot c = \gamma$ для краевой задачи и (42) для задачи управления. Очевидно, что коэффициенты этих систем могут быть найдены только приближенно. Поэтому исследование разрешимости СЛАУ требует использования специальной техники: так называемого доказательного вычислительного эксперимента (ДВЭ) [1, 2, 27, 18]. Как теоретические основы, так и практическая реализация ДВЭ требуют разработки специальных конструктивных методов, основанных на фундаментальных утверждениях общей теории и современном программном обеспечении. Основная задача таких методов – установить факт разрешимости задачи. Затем, если это удалось, построить приближенное решение с гарантированной оценкой погрешности. ДВЭ как инструмент исследования дифференциальных и интегральных моделей активно разрабатывается в течение последних двадцати лет. Существует несколько основных направлений исследования в этой области: изучение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и для некоторых классов уравнений в частных производных (УЧП) (H. Bauch, M. Berz, G. Corliss, Б.С. Добронец, E. Kaucher, W. Miranker); изучение краевых задач для ОДУ и УЧП (С.К. Годунов, Н.А. Ронто, А.М. Самойленко, M. Plum); изучение интегральных уравнений (С.А. Колмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев, R. Moor). Общая идея, лежащая в основе этих исследований, заключается в выполнении интервальных вычислений в конечномерных и функциональных пространствах и применении специальной техники округления в ходе вычислений. Используемый нами подход [1,18] позволяет рассматривать существенно более широкий класс задач, имеющих такие особенности, как нелокальность операторов, наличие разрывных решений, наличие оператора внутренней суперпозиции, краевые условия общего вида. Кроме того, при таком подходе не используются интервальные вычисления, для которых характерен быстрый рост длины результирующего интервала. Вместо этого используется арифметика рациональных чисел со специальной техникой направленного округления. Основная идея конструктивного подхода заключается в том, что для исходной задачи строится приближенная задача с точно известными параметрами, которые позволяют провести доказательную вычислительную проверку условий разрешимости. Если приближенная задача разрешима, итоговый результат зависит от близости к ней исходной задачи (напомним, что неравенство $\| \ell X - \tilde{\ell}\tilde{X} \| < 1/\| [\tilde{\ell}\tilde{X}]^{-1} \|$ для приближений $\tilde{\ell}$, $\tilde{X}$ к ℓ, X, означает, что ℓX обратима). Теоремы, лежащие в основе ДВЭ, допускают эффективную компьютерную проверку условий разрешимости исходной задачи. Если эти условия не выполняются, приходится строить новое, более точное приближение исходной задачи, и снова проверять эти условия. Реализация конструктивных методов в виде компьютерной программы (разумеется, такая программа ориентирована на строго определенный класс задач) позволяет изучать конкретную задачу, многократно повторяя ДВЭ. Теоретическое обоснование и детали практической реализации ДВЭ для изучения функционально-дифференциальных систем представлены в [18]. Ясно, что ДВЭ подразумевает построение и достаточно точную аппроксимацию основных параметров СЛАУ с гарантированными оценками погрешностей. Эффективная доказательная (компьютерно-ориентированная) техника таких построений для определенных классов функционально-дифференциальных уравнений предложена в [31] (см. также [27]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-96054.

Список литературы

1. *Азбелев Н.В.,* Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Азбелев Н.В.,* Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.

3. *Аналитика-капитал.* Т. XI: Генезис информатики и аналитики в корпоративном и административном управлении / под ред. Д.Л. Андрианова, С.Г. Тихомирова. М.:ВИНИТИ РАН, 2005. 350 с.

4. *Андрианов Д.Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия вузов. Математика. 1993. №5. С.3-16.

5. *Андрианов Д.Л.,* Симонов П.М. Краевые задачи для нелинейных разностных уравнений // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2008. №4. С. 55–69.

6. *Андрианов Д.Л.* и др. Целевое управление процессами социально-экономического развития субъектов Российской Федерации: моделирование, информационное, математическое и инструментальное обеспечение / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2008. 240с.

7. *Анохин А. В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1986. Вып. 286, № 5. С. 1037-1040.

8. *Колмогоров А.Н.* Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей // Успехи матем. наук. 1983. Вып. 38, № 4. С. 27-36.

9. *Култышев С. Ю.,* Култышева Л. М. К вопросу об идентификации функционально–дифференциальных систем с последействием //Известия вузов. Математика. 1998. №3. С. 16–27.

10. *Култышев С. Ю.,* Култышева Л. М. Об идентификации некоторых классов операторных моделей эволюционного типа // Известия вузов. Математика. 2004. №6. С. 30–40.

11. *Култышев С. Ю.,* Култышева Л. М. Идентификация линейных стохастических моделей реальных объектов // Вестник Перм. гос. техн. ун-та. Прикладная математика и механика. 2008. №7. С. 114–119.

12. *Леонтьев В.* Исследования структуры американской экономики. М.: Госстатиздат. 1958. 640 с.

13. *Максимов В.П.* Формула Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Вып. 13, №4. С.601-606, 770-771.

14. *Максимов В.П.* Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2003. 306 с.

15. *Максимов В.П.,* Румянцев А.Н. Краевые задачи и задачи импульского управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Известия вузов. Математика. 1993. №5. С.56-71.

16. *Марченко В. М.,* Поддубная О.Н. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем с многими запаздываниями // Докл. РАН. 2005. Вып. 404б, № 4. С. 465-469.

17. *Марченко В. М.,* Зачкевич З. Представление решений управляемых гибридных дифференциально-разностных импульсных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Вып. 45, № 12. С. 1775-1786.

18. *Румянцев А.Н.* Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании краевых задач / Перм. гос. ун-т. Пермь, 1999. 174 с.

19. *Смольяков Э.Р.* Методы поиска дифференциальных уравнений произвольных динамических процессов // Дифференциальные уравнения. 2009. Вып. 45, № 12. С. 1704-1715.

20. *Советский* энциклопедический словарь. М.: Большая советская энциклопедия, 1982. 1600 с.

21. *Фурасов В. Д.* Моделирование плохоформализуемых процессов. М.: Academia, 1997. 223 с.

22. *Agranovich G.A.* Some problems of discrete/continuous systems stabilization // Functional Differential Equations. 2003. Vol. 10, 1-2. P.5-17.

23. *Agranovich G.A.* Observability criteria of linear discrete-continuous system // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16, 1. P.35-51.

24. *Andrianov D.L.* Difference equations and the elaboration of computer systems for monitoring and forecasting socioeconomic development of the country and territories // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Hindawi Publishing Corporation. New York-Cairo, 2006. P. 1231-1237.

25. *Ashordia M.* On the stability of solutions of the multipoint boundary value problem for the system of generalized ordinary differential equations // Memoirs on Diff. Equations and Math. Phys. 1995. Vol. 6. P. 1-57.

26. *Azbelev N. V.*, Rakhmatullina L.F. Theory of linear abstract functional differential equations and applications // Memoirs on Diff. Equations and Math. Phys. 1996. Vol. 8. P.1-102.

27. *Azbelev N.V.,* Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications Hindawi Publishing Corporation. New York; Cairo, 2007. 314 p.

28. *Davidson J.* Econometric theory. Blackwell Publishers. Oxford, 2000. 499 p.

29. *Kurzweil Ja.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Czechoslovak Math.J. 1957. Vol. 7. P.418-449.

30. *Maksimov V. P.* Theory of Functional Differential Equations and Some Problems in Economic Dynamics // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications Hindawi Publishing Corporation. New York; Cairo, 2006. P. 74-82.

31. *Maksimov V.P.*, Rumyantsev A.N. Reliable computing experiment in the study of generalized controllability of linear functional differential systems // Mathematical modelling. Problems, methods, applications Ed. by L.Uvarova, A.Latyshev Kluwer Academic: Plenum Publishers. 2002. P.91-98.

32. *Schwabik S.* Generalized ordinary differential equations World Scientific. Singapore, 1992. 248 p.

33. *Schwabik S.*, Tvrdy M., Veivoda O. Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints Academia. Prague, 1979. 252 p.