

РАЗДЕЛ II. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

doi 10.17072/1994-9960-2016-4-49-65

УДК 330.4

ББК 65в631

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ (DSGE)

Д.Н. Шульц, канд. экон. наук, доцент кафедры информационных систем и математических методов в экономике

Электронный адрес: shultz@prognoz.ru

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15

И.А. Ощепков, аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике

Электронный адрес: oshchepkov@prognoz.ru

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Рассматриваются прикладные аспекты построения динамических стохастических моделей общего экономического равновесия (DSGE). Прежде всего рассматривается базовая модель теории реального бизнес-цикла (RBC) как предтеча DSGE-моделей, показывается процедура вычисления равновесного состояния, анализируются сходства и различия между двумя классами моделей. На примере российской экономики показано, что эти классы моделей являются чувствительными к параметрам сглаживания. Иными словами, процедура идентификации потенциального (равновесного) ВВП оказывается критичной для последующего анализа свойств экономики. Показано, что российский ВВП адекватно может быть смоделирован путём выделения долгосрочной составляющей фильтром Ходрика – Прескотта, с помощью авторегрессионной модели 4-го порядка и с учётом мировых цен на нефть. Предложены простые способы вывода динамического варианта IS-кривой, новокейнсианской кривой Филипса и уравнения Тейлора. В построенной DSGE-модели обнаружено два состояния равновесия. Исследованы проблемы, возникающие при прогнозировании на основе моделей, содержащих оператор рациональных ожиданий. Описаны различные подходы к решению уравнений с рациональными ожиданиями – метод Бланшара, через сведение к адаптивным ожиданиям, через определение рациональных ожиданий в узком смысле. Сформулированы условия устойчивости рассмотренной модели и наличия циклических колебаний. Параметры DSGE-модели откалиброваны для экономики современной России и показана реакция экономики на шок выпуска и ценовой шок. Проанализирована эффективность денежно-кредитной политики, в том числе антиинфляционной и стимулирующей. Рассчитана функция общественного благосостояния и вычислены оптимальные параметры монетарной политики, минимизирующие отклонения от целевой инфляции и отклонения ВВП от долгосрочного уровня.

Ключевые слова: динамические стохастические модели общего равновесия, теория реального бизнес-цикла, сглаживание временных рядов, макроэкономическое прогнозирование, рациональные и адаптивные ожидания, инфляционное таргетирование, денежно-кредитная политика, шок выпуска, ценовой шок, правило Тейлора.

Введение

Статья посвящена современному подходу к макроэкономическому моделированию на основе динамических стохастических моде-

лей общего равновесия (DSGE). На сегодняшний день за рубежом этот подход является основным в макроэкономике, он встречается практически в каждой зарубежной статье по

макроэкономической, бюджетной или монетарной проблематике. Этот подход является базовым для разработки денежно-кредитной политики Центральными банками большинства стран мира. На этом фоне кажется невероятным то, что в России DSGE-модели вплоть до сегодняшнего дня остаются неизвестными и практически не используются экономистами. Когда несколько лет назад новое руководство Банка России попыталось использовать DSGE-подход для разработки монетарной политики, со стороны отечественных экономистов поднялся шквал возмущения и вопросов. Тем не менее, по нашему глубокому убеждению, на сегодняшний день не существует реальной альтернативы этому самому продвинутому подходу к макроэкономическому моделированию.

Из немногочисленной русскоязычной литературы по рассматриваемому вопросу отметим следующие работы. Публикации А. Зарецкого [7; 8] являются хорошим введением в DSGE-модели. Описание DSGE-моделей России приведено в публикациях С.М. Иващенко [10], А.Г. Шульгина [19], А. Полбина [15], О. Малаховской и А. Минабутдинова [12]. Интересные результаты оценивания VAR-моделей России приведены в работах Р.В. Ломиворотова [11], Е. Федоровой и А. Лысенко [18]. Критический анализ DSGE-моделей приведён в статье Д. Фаджиоло и А. Ровентини [17]. Вопросам оценивания DSGE-моделей посвящены работы А. Микушевой [13].

Вначале рассмотрим так называемые модели реального бизнес-цикла, которые предопределили многие идеи DSGE-моделей.

1. Модель реального бизнес-цикла

Простейшая модель реального бизнес-цикла (RBC) является упрощенной версией модели [29, с. 176–180]. Этот тип моделей можно рассматривать как предшественника или как особый тип DSGE-моделей. Во второй половине XX в. новизна RBC-моделей состояла в том, что они представили микроэкономический фундамент для новой классической макроэкономики, позволили количественно оценивать влияния на экономику не только шоков спроса, но и шоков предложения, позволили анализировать эффекты межвременного замещения потребления и труда. Кроме того, в рамках RBC-моделей был предложен метод калибровки, который на сегодняшний день повсеместно применяется в практике макроэкономического моделирования.

В рамках простейшей RBC-модели сектор производства будет описываться производственной функцией Кобба – Дугласа:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}, \quad (1)$$

где Y_t – национальный доход в момент времени t , A_t – совокупная факторная производительность, K_t – основные фонды, L_t – фонд оплаты труда, $\alpha \in [0; 1]$ – эластичность выпуска по капиталу.

Особенностью RBC-подхода является то, что источник импульсов – технологические шоки, шоки со стороны предложения. При этом совокупная факторная производительность растёт постоянным темпом g и подвержена экзогенным шокам \tilde{A}_t . То есть динамику A_t можно представить в виде

$$\ln A_t = \bar{A} + gt + \tilde{A}_t,$$

где \bar{A} – стационарный уровень, в окрестности которого происходит колебания логарифма совокупной факторной производительности, \tilde{A} – случайные инновации, которые происходят единомоментно, но их влияние постепенно распространяется (затухает) во времени:

$$\tilde{A}_t = \rho_A \tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где $\rho_A \in [0; 1)$ – параметр, характеризующий инерционность инновационных процессов; ε_t – процесс белого шума (случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, постоянной дисперсией и без автокорреляции). Мы не будем рассматривать экономический рост, то есть предположим, что $g = 0$ и $\ln A_t = \bar{A} + \tilde{A}_t$.

Динамика капитала задается известным уравнением $K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$, где I_t – уровень инвестиций, а δ – норма амортизационных отчислений.

Сделаем ещё два предположения, упрощающих последующие выкладки и нахождение равновесия. Во-первых, предположим, что мы рассматриваем закрытую экономику без государства. Тогда основное макроэкономическое тождество приобретает вид

$$Y_t \equiv C_t + I_t, \quad (3)$$

где C_t – расходы на покупку товаров и услуг.

Во-вторых, предположим, что за один период капитал полностью обновляется, то есть $\delta = 1$. Тогда окончательно получаем:

$$K_{t+1} = I_t = Y_t - C_t. \quad (4)$$

На этом заканчивается описание производственного сектора, и мы переходим к описанию сектора домашних хозяйств.

Репрезентативное домашнее хозяйство максимизирует ожидаемую приведённую полезность на бесконечном горизонте планирования:

$$U = E \left[\sum_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t; 1 - l_t) \right] \rightarrow \max. \quad (5)$$

Здесь $E[\cdot]$ – оператор рациональных ожиданий [29, с.179], c_t – потребление репрезентативного домашнего хозяйства, $0 < l_t < 1$ – доля его времени, посвященная труду, $\rho > 0$ – коэффициент дисконтирования.

Предположим, что моментная функция полезности имеет вид (после линеаризации функции Кобба – Дугласа):

$$u = \ln c_t + \beta \ln(1 - l_t), \quad (6)$$

где $\beta > 0$ – параметр, определяющий предпочтения между потреблением и отдыхом.

Бюджетное ограничение имеет вид

$$c_t + b_t = W_t l_t + (1 + R_t) b_{t-1}, \quad (7)$$

где b_t – активы домашнего хозяйства, приносящие нетрудовой доход с нормой доходности R_t , W_t – ставка заработной платы.

Задача оптимизации может быть решена с помощью, например, методов динамического программирования, метода множителей Лагранжа, уравнения Эйлера и т. д. Не совсем строгий с точки зрения математики, но интуитивный и, может быть, более понятный экономистам метод решения приведён в [29, с.176–180]. Подход основан на принятом в экономической теории уравнивании предельных выгод и предельных потерь.

Вычисление оптимального потребления проводится следующим образом. Увеличим в момент времени t потребление на величину Δc при неизменном предложении труда, тогда в текущий момент полезность увеличится на $\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial c_t} \Delta c = e^{-\rho t} \frac{1}{c_t} \Delta c$. В то же время, если бы потребитель не потратил величину Δc , а сберёг бы её под ставку процента R_{t+1} , то в следующий период смог бы увеличить потребление на величину $\Delta c(1 + R_{t+1})$, что увеличило бы полезность U на величину $e^{-\rho(t+1)} E \left[\frac{1}{c_{t+1}} \Delta c(1 + R_{t+1}) \right]$. То есть решение оптимизационной задачи есть условие потребителя равновесия

$$\frac{1}{c_t} = e^{-\rho} E \left[\frac{1 + R_{t+1}}{c_{t+1}} \right]. \quad (8)$$

Аналогичным образом оптимизируется предложение труда l_t при ставке заработной платы W_t :

$$\frac{c_t}{1 - l_t} = \frac{W_t}{\beta}. \quad (9)$$

RBC и DSGE-модели представляют собой сложные системы нелинейных уравнений, которые практически невозможно решить аналитически. Выше мы сделали ряд упрощающих предпосылок, чтобы получить относи-

тельно простую систему нелинейных уравнений (обратим внимание, что в RBC-модели отсутствуют цены и монетарные факторы). Добавим ещё 2 уравнения, описывающие совершенное равновесие на рынке труда и капитала:

$$W_t = (1 - \alpha) A_t \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^\alpha, \quad 1 + R_t = \alpha A_t \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\alpha-1}.$$

Также нам понадобятся соотношения, связывающие совокупные и среднелюдиные переменные $C_t = c_t N$, $l_t = \frac{L_t}{N}$, где N – численность экономически активного населения.

Принятый способ решения RBC- и DSGE-моделей включает:

1) нахождение стационарного (*steady-state*) состояния, в котором фазовые переменные не меняются;

2) описание динамики экономики в окрестности стационарного состояния.

Для того чтобы рассчитать стационарное состояние, логарифмируем уравнение (8) и после серии преобразований для нормы сбережений s_t получаем

$$-\ln(1 - s_t) - \ln Y_t = -\rho + \ln \alpha - \ln s_t - \ln Y_t + \ln E \left[\frac{1}{1 - s_{t+1}} \right]. \quad (10)$$

Тогда равновесная норма сбережений s^* находится из уравнения $-\ln(1 - s^*) = -\rho + \ln \alpha - \ln s^* - \ln \left[\frac{1}{1 - s^*} \right]$ и равна $s^* = \alpha \cdot e^{-\rho}$.

Аналогично находим равновесный уровень предложения труда:

$$l^* = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha) + \beta(1 - s^*)}. \quad (11)$$

Теперь уравнение для национального дохода при равновесной норме сбережений и норме занятости можно записать в виде $\ln Y_t = \ln A_t + \alpha \ln s^* + \alpha \ln Y_{t-1} + (1 - \alpha) \ln l^* + (1 - \alpha) \ln N$. Для отклонения его логарифма от равновесного уровня имеем $y_t \equiv \ln Y_t - \ln Y^* = \alpha y_{t-1} + \tilde{A}_t$. И с учётом $\tilde{A}_t = \rho \tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_t$ и $\tilde{A}_{t-1} = y_{t-1} - \alpha y_{t-2}$ уравнение динамики отклонения логарифма ВВП от стационарного уровня принимает вид

$$y_t = (\alpha + \rho_A) y_{t-1} - \alpha \rho_A y_{t-2} + \varepsilon_t. \quad (12)$$

2. Анализ RBC-модели

Корни характеристического уравнения для этого разностного уравнения равны α и ρ_A . Оба корня по абсолютной величине меньше 1, что гарантирует устойчивость макроэкономических переменных относительно стационарного состояния.

Интересно, что на динамические свойства системы оказывают влияние только 2 параметра – α и ρ_A . Другие параметры модели,

например β и ρ , определяют только само стационарное состояние, но не отклонение от него.

Также обращает на себя внимание, что итоговое уравнение (12) есть авторегрессионное уравнение 2-го порядка. Не секрет, что среди эконометристов достаточно распространено определённое пренебрежительное отношение к экстраполяционным моделям. Считается, что они являются более примитивным, грубым описанием экономических процессов по сравнению с факторными моделями. Однако представленная RBC-модель показывает, что различия между двумя подходами не носят взаимоисключающий характер (см. также дискуссию академика Р. Энтова с академиком А. Ивантером [9]), что сложные факторные (структурные) модели могут быть сведены к экстраполяционным.

Ещё одной особенностью RBC- и DSGE-моделей является то, что они всегда оперируют отклонениями макроэкономических переменных от своих стационарных уровней (уровня полной занятости). Отметим, что оценки потенциального ВВП чаще всего получаются с помощью фильтра Ходрика – Прескотта [3]. Кроме того, долгосрочный уровень ВВП может быть получен с помощью производственных функций или метода стохастических производственных границ, фильтров Band-Pass, LRX или фильтра Калмана, метода Бланшара – Куа (Blanchard – Quah) [3].

При этом расхождения в результатах различных методов могут достигать 4%. То есть, если одни методы утверждают, что экономика находится выше своих производственных возможностей, другие могут показывать наличие резервов для роста. Эта проблема неустойчивости результатов по отношению к выбору способа фильтрования особенно остро проявилась в 2014 г., когда экспертное сообщество раскололось по вопросу относительно загруженности производственных мощностей в российской экономике (см. обзор различных аргументов в статье [5]). Относительно этой проблемы эксперты Банка России отметили следующее: «Достоверность результатов модели часто зависит от качества суждений экспертов, верифицировать которые практически невозможно» [6].

Зададимся вопросом, насколько чувствительны оценки параметров уравнения (12) к выбору параметров сглаживания.

Мы рассчитали ВВП в ценах 1995 г., на периоде 1996–2014 гг. выделили трендовую и циклическую составляющие с помощью фильтра Ходрика – Прескотта. В соответствии с распространёнными рекомендациями для квартальной динамики был использован параметр сглаживания $\lambda = 1600$. Для сравнения мы задали $\lambda = 10$. На представленных результатах (рис. 1 и рис. 2) видно, что график циклической составляющей очень чувствителен к выбору параметра сглаживания.

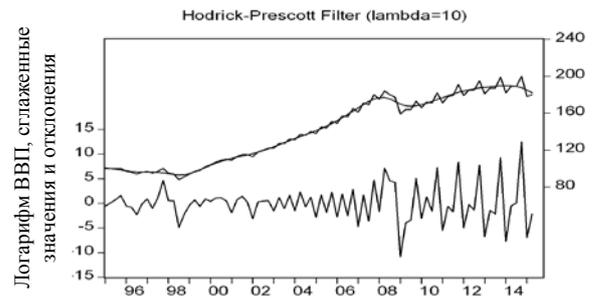


Рис. 1. Результаты применения фильтра Ходрика – Прескотта при $\lambda = 10$

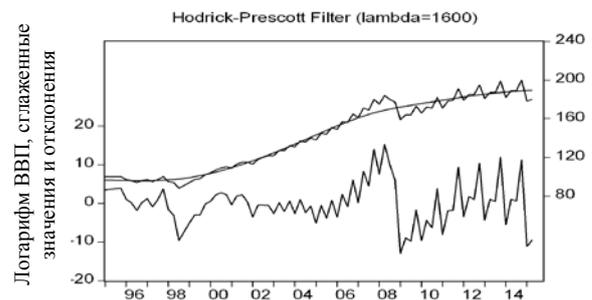


Рис. 2. Результаты применения фильтра Ходрика – Прескотта при $\lambda = 1600$

На основе автокорреляционных и частных автокорреляционных функций мы определили, что оба ряда могут быть описаны процессами авторегрессии 4-го порядка. Результаты оценивания по обеим моделям представим в табл. 1. Видно, что обе модели имеют хорошие параметры аппроксимации, но для ряда с $\lambda = 1600$ коэффициент при авторегрессоре гораздо ближе к 1. Это говорит о большей инерционности ряда, что ожидаемо, т. к. при $\lambda = 1600$ степень сглаженности больше.

Таблица 1

Результаты оценивания модели AR(4) при $\lambda = 10$ и $\lambda = 1600$

Коэффициенты	Оценки коэффициентов при $\lambda = 10$		Оценки коэффициентов при $\lambda = 1600$	
	Коэффициент	p-val	Коэффициент	p-val
C	-0.017316	0.9584	-0.601982	0.6773
AR(1)	–	–	0.534030	0.0000
AR(3)	-0.444385	0.0000	-0.506116	0.0001

Коэффициенты	Оценки коэффициентов при $\lambda = 10$		Оценки коэффициентов при $\lambda = 1600$	
	Коэффициент	p-val	Коэффициент	p-val
AR(4)	0.572380	0.0000	0.619799	0.0000
R2	0.571542		0.405231	
Adj R2	0.560117		0.381119	
Prob (F-stat)	0.000000		0.000000	

Для нас важнее то, что циклическая составляющая принципиально по-разному реагирует на внешние шоки. Мы рассчитали функции отклика для построенных моделей. Из графиков видно, что для случая $\lambda = 1600$ (рис. 4) накопленный отклик существенный и устойчивый, а для $\lambda = 10$ (рис. 3) он быстро стабилизируется и его значения незначительны. Это означает, что в первом случае мы могли бы сделать вывод, например, что государственная экономическая политика имеет эффект в долгосрочном периоде, а во втором – что эффект от государственного регулирования более краткосрочный. Таким образом, выбор параметра сглаживания оказывается принципиальным для анализа свойств экономики.

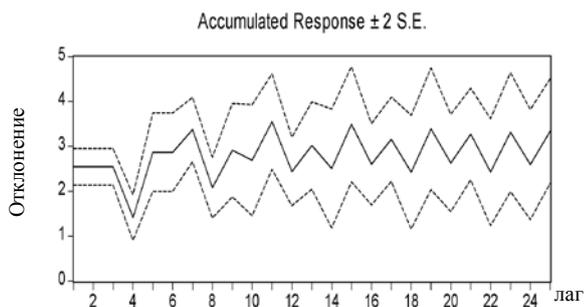


Рис. 3. Функции отклика автогреессионной модели при $\lambda = 10$

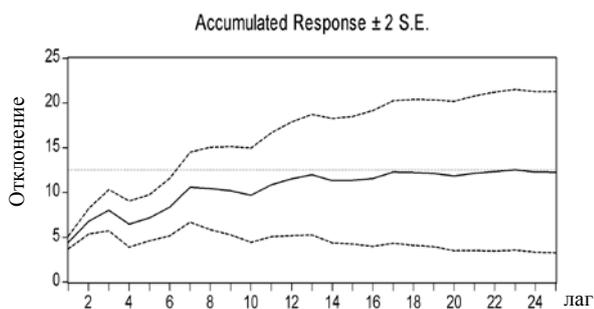


Рис. 4. Функции отклика автогреессионной модели при $\lambda = 1600$

Следующее обстоятельство, которое необходимо отметить, – это то, что спецификация авторегрессионного уравнения (12) определяется случайными возмущениями \tilde{A}_t (2), в которых учитываются технологические, монетарные, внешнеэкономические и прочие шоки. То есть, если в нашем случае динамика y_t описывается процессом AR(4), то необходимо, чтобы случайные возмущения описывались процессом AR(3) $\tilde{A}_t = \rho_1 \tilde{A}_{t-1} + \rho_2 \tilde{A}_{t-2} + \rho_3 \tilde{A}_{t-3} + \varepsilon_t$. Тогда уравнение для национального дохода примет вид

$$y_t = (\alpha + \rho_1)y_{t-1} + (\rho_2 - \alpha\rho_1)y_{t-2} + (\rho_3 - \alpha\rho_2)y_{t-3} - \alpha\rho_3 y_{t-4} + \varepsilon_t. \quad (13)$$

Имея эконометрические оценки (табл. 1), можно восстановить оценки для параметров $\alpha, \rho_1, \rho_2, \rho_3$. Так, при $\lambda = 10$ получаем следующие оценки: $\alpha = 0.711, \rho_1 = -0.711, \rho_2 = -0.506, \rho_3 = -0.804$. При $\lambda = 1600$ оценки следующие: $\alpha = 0.848, \rho_1 = -0.314, \rho_2 = -0.266, \rho_3 = -0.731$. Для сравнения приведём результаты Афанасьева – Пономаревой [4], которые оценили коэффициент α для российской экономики в интервале 0,71–0,77.

Если проанализировать динамику циклической составляющей (рис. 1, внизу), то обращает на себя внимание, что циклическая компонента принимает положительные значения до кризисных явлений и после. То есть циклическая переменная зависит от неких внешних факторов, которые необходимо учесть в модели. Поскольку простейшая RBC-модель, рассмотренная выше, не учитывала внешней торговли, мы добавили в уравнение (13) цену на нефть «Urals» (долл. за баррель) и получили следующие результаты оценивания (табл. 2).

Таблица 2

Результаты оценивания модели AR(4) с ценой на нефть при $\lambda = 10$ и $\lambda = 1600$

Коэффициенты	Оценки коэффициентов при $\lambda = 10$		Оценки коэффициентов при $\lambda = 1600$	
	Коэффициент	p-val	Коэффициент	p-val
C	-7.491876	0.0007	-27.79541	0.0131
P	0.044729	0.0387	0.135298	0.0002
P (-1)	0.048735	0.0302	0.111113	0.0025
AR (1)	–	–	0.286838	0.0033
AR (3)	-0.142783	0.0326	-0.267791	0.0116
AR (4)	0.933189	0.0000	0.900000	0.0000

Коэффициенты	Оценки коэффициентов при $\lambda = 10$		Оценки коэффициентов при $\lambda = 1600$	
	Коэффициент	p-val	Коэффициент	p-val
R2	0.744235		0.729111	
AdjR2	0.724561		0.702553	
Prob (F-stat)	0.000000		0.000000	

Для этих спецификаций получаются уже схожие функции отклика (рис. 5 и рис. 6). То есть мы считаем такую спецификацию более корректной и структурно устойчивой.

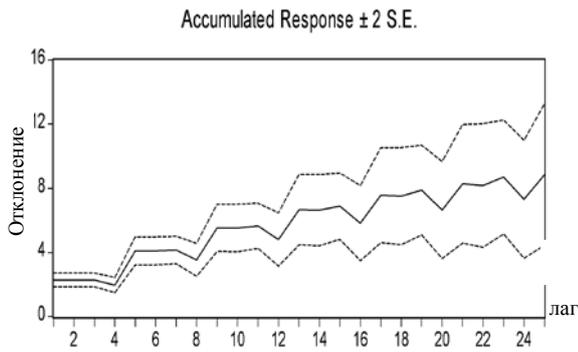


Рис. 5. Функции отклика модели AR(4) с ценой на нефть при $\lambda = 10$

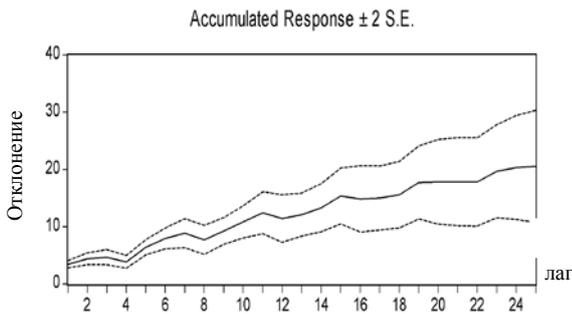


Рис. 6. Функции отклика модели AR(4) с ценой на нефть при $\lambda = 1600$

Следующая проблема, связанная с потенциальным ВВП, – его прогнозирование. Зачастую предполагается, что на сбалансированной траектории развития экономика растёт постоянным темпом, то есть по экспоненте [22, с. 25]. Соответственно, все абсолютные показатели (занятость, основные фонды, выпуск) растут одинаковым темпом, а пропорции между ними (доли потребления и инвестиций в национальном доходе, производительность труда, фондовооруженность и т. д.) постоянны или по крайней мере более стабильны, чем в фактических данных.

Таким образом, выделение и прогнозирование долгосрочной тренд-циклической составляющей остаётся в какой-то мере процедурой субъективной. По этой причине RBC- и DSGE-модели, а также разрабатываемая на их основе монетарная политика подвергаются критике. С другой стороны, как мы попыта-

лись показать, при аккуратной работе с временными рядами и подборе спецификации можно получить достаточно устойчивые результаты.

Теперь мы можем перейти собственно к DSGE-моделям.

3. Динамическая стохастическая модель общего равновесия

Неокейсианские DSGE-модели появились позже RBC-моделей. Первое отличие, которое можно отметить, – это то, что в них значительное внимание уделяется денежным аспектам и ценам. Во-вторых, в них учтены основные провалы рынка – несовершенная конкуренция, негибкие цены и заработные платы и т. д. В-третьих, DSGE-модели учитывают государственное вмешательство, прежде всего денежно-кредитную политику, реже фискальную. Всё это определило популярность DSGE-моделей в качестве инструмента изучения экономических систем и разработки экономической политики многими центральными банками. На сегодняшний день DSGE-модели можно считать стандартом для макроэкономического моделирования.

Принято считать, что простейшая DSGE-модель включает 3 составляющих – динамическое уравнение IS, новокейсианское уравнение Филлипса и уравнение Тэйлора [17, с. 27–29]. Первое играет роль совокупного спроса, второе – совокупного предложения, оба формируют «non-policy» блок DSGE-модели. Уравнение Тэйлора пришло на смену уравнению LM-кривой, описывающей равновесие на денежном рынке.

Рассмотрим последовательно эти три составляющие DSGE-моделей.

Напомним, что в неоклассическом синтезе под IS-кривой подразумевается сочетание национального дохода и ставки процента, обеспечивающее равновесие на рынке товаров и услуг. Динамическая IS-кривая может быть получена из решения задачи потребителя¹:

¹ Как правило, используется функция полезности CRRA вида $u(c, l) = \frac{(c^\phi l^{1-\phi})^{1-\psi}}{1-\psi}$, где параметр $\psi > 0$ – склонность к риску. Межвременная эластичность замещения потребления равна $1/\psi$. При $\psi = 1$ $u(c, l) = \phi \ln c + (1 - \phi) \ln l$.

$$U = E \left[\sum_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \left(\ln C_t - \varphi \ln L_t + \chi \ln \frac{M_t}{P_t} \right) \right] \rightarrow \max$$

при бюджетном ограничении

$$P_t C_t + M_t + B_t = W_t L_t + M_{t-1} + (1 + R_{t-1}) B_{t-1},$$

где P_t – уровень цен в экономике, M_t – номинальные кассовые остатки. Это две новые переменные, которых не было в RBC-модели.

Далее в модели нигде не будет фигурировать денежная масса M_t . Но она может понадобиться в тех DSGE-моделях, которые используются для таргетирования денежной массы, для оценки эффектов от увеличения денежного предложения и т. д.

Динамика оптимального потребления задается уравнением

$$e^{-\rho} E \left[\frac{1}{C_{t+1}} \frac{P_t (1 + R_t)}{P_{t+1}} \right] = \frac{1}{C_t}. \quad (14)$$

Иногда при построении DSGE-моделей потребление сразу заменяется на выпуск $Y_t = C_t$ (см., например, [23, с. 15]). На наш взгляд, более корректное, хотя тоже очень грубое, предположение состоит в том, что выпуск и потребление связаны линейно $C_t = MPC \cdot Y_t$, где MPC – предельная норма потребления. Тогда получаем уравнение IS-кривой:

$$y_t = \rho + E[y_{t+1}] - (R_t - E[\pi_{t+1}]), \quad (15)$$

где $y_t \equiv \ln \frac{Y_t}{Y_t^*} = \ln Y_t - \ln Y_t^*$, $\pi_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1}$.

Выражение для оптимального предложения труда имеет вид

$$\frac{\varphi \cdot MPC \cdot Y_t}{L_t} = \frac{W_t}{P_t}. \quad (16)$$

Переходя к следующему элементу DSGE-модели, интересно заметить, что в простейшей модели предполагается несовершенная конкуренция на товарном рынке, и совершенная – на рынках факторов производства². Новая кейнсианская кривая Филлипса (НКПС) может быть выведена на основе моделей Тэйлора [31] и Калво [20] или на основе модели Ротемберга – Вудфорда [30]. Гали и Гертлер [24] предложили «гибридный» вариант³. Рассмотрим более простой вариант на основе [27].

Как известно из микроэкономики, оптимальная цена P_t^* на несовершенных рынках

определяется по правилу $P_t^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} MC_t$, где ε – эластичность спроса по цене, а MC_t – предельные издержки. В логарифмах это означает $p_t^* = \mu + mc_t$, где $\mu = \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}$. Далее через малые буквы p мы будем обозначать логарифм цен, например $p_t^* \equiv \ln(P_t^*)$.

Но часть фирм может свободно изменять цену, другие ограничены долгосрочными контрактами. Когда производитель ограничен долгосрочными контрактами и не может установить оптимальную цену p_t^* , то несёт потери. Задача производителя заключается в том, чтобы в момент времени t установить цену \bar{p}_t , которая будет действовать на протяжении долгого периода времени и которая будет минимизировать дисконтированную (с учётом вероятности изменения цен) ожидаемую величину потерь $S(\bar{p}_t) = \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\theta)^s E[(\bar{p}_t - p_{t+s}^*)^2]$.

Минимизация этой квадратичной функции потерь даёт выражение для установления оптимальной цены $\bar{p}_t = \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\theta)^s E[p_{t+s}^*]$ или $\bar{p}_t = (1 - \beta\theta) \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\theta)^s E[p_{t+s}^*]$. То есть $\bar{p}_t = (1 - \beta\theta) \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\theta)^s E[\mu + mc_{t+s}]$. Как известно, эта функция есть решение уравнения $\bar{p}_t = (1 - \beta\theta)(\mu + mc_t) + \beta\theta E[\bar{p}_{t+1}]$ при $|\beta\theta| < 1^4$.

Общий уровень цен определяется как средневзвешенное гибких и неизменных цен $p_t = \theta p_{t-1} + (1 - \theta)\bar{p}_t$ (параметр $\theta \in (0; 1)$ – мера негибкости (инерционности) цен, представляет собой долю фирм с жесткими ценами). Данное уравнение можно интерпретировать и как модель частичной корректировки.

С учетом этого получаем выражение для цен $\frac{p_t - \theta p_{t-1}}{(1 - \theta)} = (1 - \beta\theta)(\mu + mc_t) +$

$+\beta\theta E \left[\frac{p_{t+1} - \theta p_t}{(1 - \theta)} \right]$. Или в терминах инфляции

$$\pi_t \equiv p_t - p_{t-1}: \quad \pi_t = \lambda mcr_t + \beta E[\pi_{t+1}], \quad (17)$$

где $mcr_t = \mu + mc_t - p_t$ – реальные предельные издержки, а $\lambda = \frac{\mu(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta}$.

Поскольку реальные предельные издержки – ненаблюдаемая переменная, то предполагается, что они пропорциональны разрыву выпуска $\lambda mcr_t = \kappa u_t$. Тогда получаем новую кейнсианскую кривую Филлипса (параметр κ именуется иногда «параметром Кальво»)

² Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект «Снижение асимметрии информации на региональном рынке труда» № 16-12-59015.

³ В этом случае НКПС принимает вид $\pi_t = \beta E[\pi_{t+1}] + \kappa u_t + \omega \pi_{t-1}$. Аналогичная форма использовалась И. Ощепковым для DSGE-модели России $\pi_t = \beta E[\pi_{t+1}] + \kappa mcr_t + (1 - \beta)\pi_{t-1} + u_t$ [1; 2].

⁴ Рассмотрим уравнение вида $p_t = (1 - a)z_t + aE[p_{t+1}]$. Его решение даёт $p_t = (1 - a)z_t + aE[(1 - a)z_{t+1} + aE[p_{t+2}]] = (1 - a)z_t + a(1 - a)E[z_{t+1}] + a^2 E[p_{t+2}] = \dots = (1 - a) \sum_{s=0}^{\infty} a^s E[z_{t+s}]$. При этом учитывается, что $\lim_{t \rightarrow \infty} a^t E[p_t] = 0$ при $|a| < 1$ и $E[p_t] < \infty$.

$\pi_t = \kappa y_t + \beta E[\pi_{t+1}]$. Нейсс и Нельсон [26] на примере США, Великобритании и Австралии доказывают, что использование выпуска предпочтительнее использования предельных издержек.

Выше мы получили 2 уравнения, формирующие так называемый «pop policy» блок для нашей DSGE-модели. Для того чтобы «замкнуть» систему из 3 переменных (инфляция, разрыв выпуска, ставка процента), не хватает уравнения Тейлора, описывающего поведение денежного регулятора. Оно может быть получено как решение Центральным банком задачи по минимизации функции общественных потерь (ФОП):

$$L = \lambda(\pi_t - \pi^T)^2 + y_t^2 \rightarrow \min, \quad (18)$$

где λ – параметр, задающий предпочтения денежного регулятора между двумя целями, а π^T – целевой уровень инфляции.

Необходимо ещё раз отметить, что y – не сам национальный доход, а отклонение его логарифма от долгосрочного равновесного уровня. То есть ЦБ проводит контрциклическую денежно-кредитную политику, стремясь поддерживать экономику в состоянии полной занятости, избегая перегревов или рецессии.

Прежде всего обратим внимание на то, что ставка процента входит только в IS-уравнение. Но через выпуск y_t она влияет и на инфляцию в НКРС-уравнении. Если центральный банк стабилизирует выпуск $y_t = 0$, то, как видно из НКРС-уравнения, будет стабилизирована и инфляция. И наоборот, чем больше отклонение инфляции от своего целевого уровня, тем больше отклонение выпуска от равновесия. Д. Ромер [29, с. 505] предложил использовать условие линейности $y_t = -q(\pi_t - \pi^T)$. Коэффициент $q > 0$ зависит от параметра λ из функции общественных потерь⁵.

Тогда IS-кривая принимает вид $y_t = \rho - q(E[\pi_{t+1}] - \pi^T) - \eta(R_t - E[\pi_{t+1}])$. Если в эту формулу подставить выражение для ожидаемой инфляции из кривой Филлипса, то после преобразований получим

$$R_t = \pi_t + \frac{\rho}{\eta} + \frac{q}{\eta}(\pi_t - \pi^T) + \left(\kappa \frac{\rho}{\eta} - \kappa - 1\right)y_t. \quad (19)$$

Иногда (см., например, [21, с. 7]) в уравнение Тэйлора добавляют ограничение на неотрицательность процентной ставки. Но если раньше отрицательные, особенно номинальные,

процентные ставки казались чем-то абсурдным, то в наше время всё чаще центробанки различных стран мира прибегают к этой мере для стимулирования инфляции и экономического роста.

Итак, итоговая запись для малой⁶ DSGE-модели принимает вид:

$$\begin{cases} y_t = \rho + E[y_{t+1}] - \\ - \eta(R_t - E[\pi_{t+1}]) + \varepsilon_t, \\ \pi_t = \beta E[\pi_{t+1}] + \kappa y_t + u_t, \\ R_t = \pi_t + \frac{\rho}{\eta} + \frac{q}{\eta}(\pi_t - \pi^T) - \\ - \left(\kappa - \kappa \frac{\rho}{\eta} + 1\right)y_t + v_t. \end{cases} \quad (20)$$

Итак, мы рассмотрели процедуру построения DSGE-модели на основе кейнсианского микрофундамента. Нередко экономисты пропускают этот этап и начинают построение макроэкономических моделей просто с постулирования этой системы уравнений. Исследуем свойства этой динамической системы.

4. Анализ свойств DSGE-модели

Построенная модель имеет два состояния равновесия. Первое равновесие определяется как $y_t = E[y_{t+1}] = 0$, $\pi_t = E[\pi_{t+1}] = \pi^T$. Константа $\beta = 1$ обеспечивает непротиворечивость системы в состоянии равновесия. Равновесная номинальная ставка процента определяется равенством $R_t = \pi^T + \frac{\rho}{\eta}$, а слагаемое $\frac{\rho}{\eta}$ имеет смысл равновесной реальной ставки процента.

Второе тривиальное равновесие $y_t = E[y_{t+1}] = 0$, $\pi_t = E[\pi_{t+1}] = 0$. Для него не требуется накладывать ограничения на параметр β , но необходимо, чтобы $\pi^T = 0$. Тогда равновесная ставка процента (и номинальная, и реальная) $R_t = \frac{\rho}{\eta}$. Если же центробанк установит ненулевую цель по инфляции, т.е. будет стремиться к неравновесному состоянию экономики, то ставку процента необходимо установить на уровне $R_t = \frac{\rho - q\pi^T}{\eta}$. Как видно из IS-уравнения, равновесие в этом случае не достигается (в случае $q = 0$ равновесие всё-таки достигается, но это ситуация, когда денежный регулятор как раз не преследует цели по инфляции).

В примере RBC-модели мы избавились от рациональных ожиданий ещё до вычисления отклонений от равновесной траектории. Однако в канонической записи DSGE-модели оператор

⁵ М. Вудфорд в своей монографии [32] выводит правило Тэйлора более формально, не опираясь на гипотезу линейности.

⁶ С некой долей условности принято называть такую модель «малой». Модели, включающие до 10 эндогенных переменных – средние DSGE-модели. Свыше 10 – большие.

рациональных ожиданий присутствует, и на следующем шаге возникает необходимость оценивания параметров и прогнозирования. Рассмотрим различные аспекты прогнозирования на основе DSGE-моделей. Представим DSGE-модель в матричном виде:

$$AE[x_{t+1}] = a + Bx_t + C\varepsilon_t. \quad (21)$$

Интересно, что такая система не содержит ни одного лага. Текущие значения эндогенных переменных x_t не зависят от предыдущих значений, а только от будущих (*forward looking*): $x_t = B^{-1}(AE[x_{t+1}] - a - C\varepsilon_t)$.

Представим эту модель в виде $x_t = \tilde{A}E[x_{t+1}] + \tilde{\varepsilon}_t = \tilde{A}E[\tilde{A}E[x_{t+2}] + \tilde{\varepsilon}_{t+1}] + \tilde{\varepsilon}_t = \dots = \tilde{A}^T E[x_{t+T}] + \sum_{s=0}^{T-1} \tilde{A}^s \tilde{\varepsilon}_{t+s}$, где $\tilde{A} = B^{-1}A$ и $\tilde{\varepsilon}_t = -B^{-1}(a + C\varepsilon_t)$. Первым слагаемым $\tilde{A}^T E[x_{t+T}]$ можно пренебречь в предположении, что к моменту $t+T$ в системе установится равновесие $x_{t+T} = 0$ [23, с. 49], и/или в предположении, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{A}^T = 0$. То есть условие существования равновесия будет заключаться в том, чтобы собственные числа матрицы $\tilde{A} = B^{-1}A$ находились внутри единичного круга. Тогда решение системы мы можем записать в виде $x_t = \sum_{s=0}^{T-1} \tilde{A}^s \tilde{\varepsilon}_{t+s}$.

Если для решения системы опираться на предположение, что $x_{t+T} = 0$, то текущие значения зависят от будущих и от периода времени T , когда система должна прийти в равновесие. Иными словами, история должна подстроиться под будущее. Проиллюстрируем сказанное результатами двух расчетов по переменным y_t (рис. 7) и R_t (рис. 8).

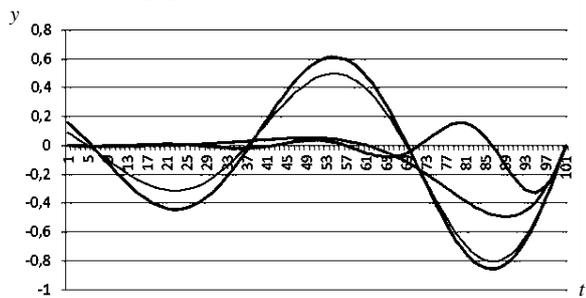


Рис. 7. Различные возможные траектории переменной y_t при фиксированной правой точке

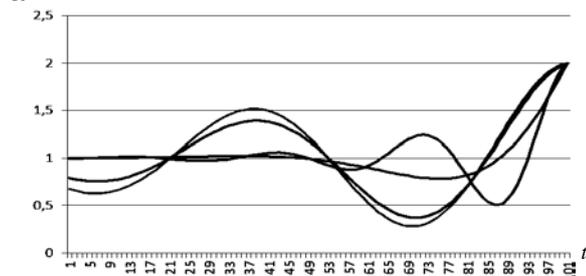


Рис. 8. Различные возможные траектории переменной R_t при фиксированной правой точке

Дополнительно для тех же переменных y_t и R_t мы провели расчеты, изменяя только время достижения равновесия $T \in \{100, 99, 90, 50\}$. Как видно из диаграмм, траектории прогнозов могут меняться кардинально (рис. 9 и рис. 10).

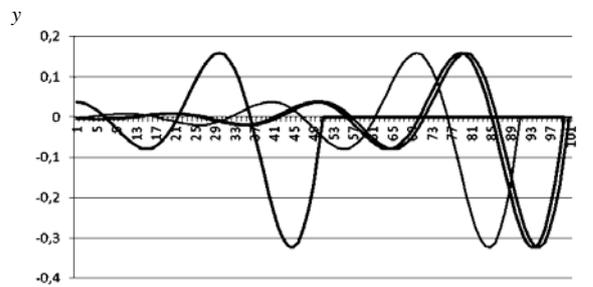


Рис. 9. Динамика переменной y_t при различных значениях $T = \{100, 99, 90, 50\}$, момента достижения равновесия

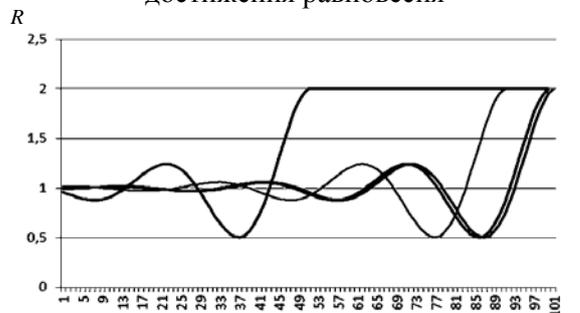


Рис. 10. Динамика переменной R_t при различных значениях $T = \{100, 99, 90, 50\}$, момента достижения равновесия

Рассмотрим иной подход к решению уравнений с оператором рациональных ожиданий. Для начала отметим, что в литературе принято противопоставлять адаптивные и рациональные ожидания. Отчасти это связано вероятно, с тем, что первая гипотеза была предложена и использовалась в середине XX в. в монетаризме, гипотеза рациональных ожиданий была введена позже новой классической школой. С другой стороны, если задаться вопросом: «Как формируются рациональные ожидания?», то модель адаптивных ожиданий окажется частным случаем рациональных ожиданий [14, с. 593]. Более того, Дж. Мут [28, с. 23–31], автор гипотезы рациональных ожиданий, в 1960 г. сформулировал условия, при которых адаптивные ожидания являются рациональными.

Как известно, модель адаптивных ожиданий имеет вид $E[x_{t+1}] - E[x_t] = -\mu(E[x_t] - x_t)$, где $\mu \in (0; 1)$ – параметр, отражающий скорость адаптации. Также известно, что модель адаптивных ожиданий может быть записана в виде модели распределённых лагов, при этом происходит избавле-

ние от ненаблюдаемых переменных ожиданий $E[x_{t+1}] = (1 - \mu)E[x_t] + \mu x_t = (1 - \mu)^{t+1}E[x_0] + \dots + \mu \sum_{j=0}^t (1 - \mu)^{t-j} x_j$. Подставляя это выражение в нашу модель, получаем $A((1 - \mu)^{t+1}E[x_0] + \mu \sum_{j=0}^t (1 - \mu)^{t-j} x_j) = a + Bx_t + C\varepsilon_t$.

Слагаемое $(1 - \mu)^{t+1}E[x_0]$ можно считать пренебрежимо малым при больших t , а также в случае, если система изначально находилась в состоянии равновесия $E[x_0] = 0$. После преобразования Койка получим окончательное представление нашей DSGE-модели с адаптивными ожиданиями в виде модели VARMA(1;1):

$$(A\mu - B)x_t = a\mu - B(1 - \mu)x_{t-1} + C\varepsilon_t - C(1 - \mu)\varepsilon_{t-1}.$$

Следующий подход, который мы рассмотрим, основан на самом определении рациональных ожиданий. Напомним, что в сильной форме гипотеза рациональных ожиданий предполагает, что экономические агенты верно прогнозируют экономическую ситуацию $E[z_{t+1}] = z_{t+1}$. Более слабая форма допускает погрешности прогноза $E[z_{t+1}] = z_{t+1} + e_{t+1}$. В последнем случае из DSGE-модели, по сути, исключается оператор рациональных ожиданий, но остаётся опережение z_{t+1} и необходимо сделать предположения относительно свойств случайных возмущений e_{t+1} . Последние, как правило, описываются с помощью модели AR(1).

Таким образом, DSGE-модель может быть переписана в виде более привычных *backward-looking* моделей. Итак, если $E[x_{t+1}] = x_{t+1} + e_{t+1}$, то для системы (21) справедливо следующее представление: $Ax_t = a + Bx_{t-1} + C\varepsilon_{t-1} - Ae_t$. Тогда x_t можно выразить как $x_t = A^{-1}a + A^{-1}Bx_{t-1} + A^{-1}C\varepsilon_{t-1} - e_t$. При отсутствии внешних шокков имеем $x_t = A^{-1}a + (A^{-1}B)x_{t-1} = (A^{-1}B)^{t-1}A^{-1}a + (A^{-1}B)^t x_0$.

Известны следующие утверждения относительно устойчивости равновесия $x^* = (I - A^{-1}B)^{-1}A^{-1}a$ [16, с. 66]:

1. Если для всех собственных чисел матрицы $A^{-1}B$ справедливо $|\lambda_i| < 1$, то равновесие является асимптотически устойчивым.

2. Если существует хотя бы одно собственное значение $|\lambda_i| > 1$, то равновесие неустойчиво.

3. Если все $|\lambda_i| \leq 1$, и для всех $|\lambda_j| = 1$ число линейно независимых собственных векторов равно кратности λ_j , то равновесие является устойчивым по Ляпунову.

4. Если существует хотя бы одно $|\lambda_j| = 1$ такое, что число линейно независимых собственных векторов меньше кратности λ_j , то равновесие является неустойчивым.

Например, после избавления от оператора рациональных ожиданий ($E[\pi_{t+1}] = \pi_{t+1} + u_e e_t$ и $E[y_{t+1}] = y_{t+1} + \varepsilon_e e_{t+1}$) DSGE-модель принимает вид

$$\begin{cases} y_t = \rho + y_{t+1} - \eta(R_t - \pi_{t+1}) + \varepsilon_t + \\ \quad + \varepsilon_e e_{t+1} + \eta u_e e_t \\ \pi_t = \pi_{t+1} + \kappa y_t + u_t + u_e e_t \\ R_t = \pi_t + \frac{\rho}{\eta} + \frac{q}{\eta}(\pi_t - \pi^T) - \\ \quad - \left(\kappa - \kappa \frac{\rho}{\eta} + 1\right) y_t + v_t. \end{cases}$$

Выражая в первых уравнениях будущие значения через предыдущие, получаем

$$\begin{cases} y_t = -\rho + y_{t-1} + \eta(R_{t-1} - \pi_t) - \\ \quad - \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_e e_t - \eta u_e e_{t-1} \\ \pi_t = \pi_{t-1} - \kappa y_{t-1} - u_{t-1} - u_e e_{t-1} \\ R_t = \pi_t + \frac{\rho}{\eta} + \frac{q}{\eta}(\pi_t - \pi^T) - \\ \quad - \left(\kappa - \kappa \frac{\rho}{\eta} + 1\right) y_t + v_t. \end{cases}$$

Систему можно записать в матрично-векторной форме:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa - \kappa \frac{\rho}{\eta} + 1 & -1 - \frac{q}{\eta} & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y_t \\ \pi_t \\ R_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\rho \\ 0 \\ \frac{\rho - q\pi^T}{\eta} \end{pmatrix}}_a + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \eta \\ -\kappa & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ \pi_{t-1} \\ R_{t-1} \end{pmatrix} + f_t.$$

При этом матрица $A^{-1}B$ имеет 3 собственных числа: 0 и $1 + \frac{\kappa\rho - \eta \pm \sqrt{(\kappa\rho - \eta)^2 - 4\kappa q}}{2}$.

В случае $q = 0$ (Центробанк преследует только цель поддержания национального дохода на долгосрочном уровне) собственные числа равны 0, 1, $1 + \kappa\rho - \eta$. Тогда собственные числа больше 1 по абсолютной величине отсутствуют, если $\kappa\rho < \eta$. Иными словами, условие устойчивости заключается в том, чтобы равновесная реальная ставка процента удовлетворяла неравенству $r^* = \frac{\rho}{\eta} < \frac{1}{\kappa}$.

Для иллюстрации рассмотрим две ситуации: $\kappa\rho < \eta$ (рис. 11) и $\kappa\rho > \eta$ (рис. 12). В первой ситуации система в ответ на положительный шок переходит из одного равновесия в другое. Во второй ситуации шок выводит систему из старого равновесия, а новое равновесие не достигается.

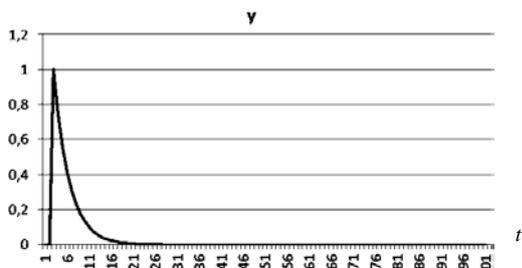


Рис. 11. Динамика переменной y_t в случае $\kappa\rho < \eta$ ($\kappa = \rho = \eta = 0,5$) при положительном шоке выпуска

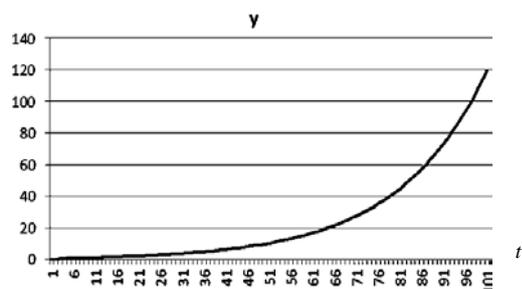


Рис. 12. Динамика переменной y_t в случае $\kappa\rho > \eta$ ($\kappa = \rho = 0,5, \eta = 0,2$) при положительном шоке выпуска

Возвращаясь к более общему случаю $q \neq 0$, можно отметить, что при $(\kappa\rho - \eta)^2 < 4\kappa q$ в системе возникают циклические колебания (рис. 13 и рис. 14). Также можно сформулировать условие устойчивости:

$$\begin{cases} -4 \leq \kappa\rho - \eta < 0 \\ -2\kappa q < (\kappa\rho - \eta) + 2. \end{cases}$$

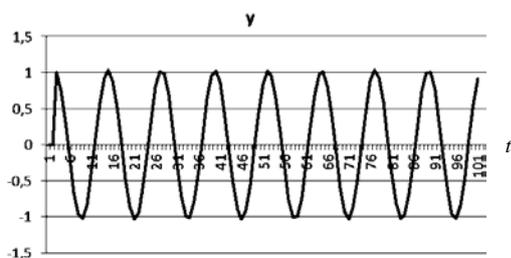


Рис. 13. Динамика переменной y_t при $\kappa = \rho = \eta = 0,5$ и $q = 0,5$

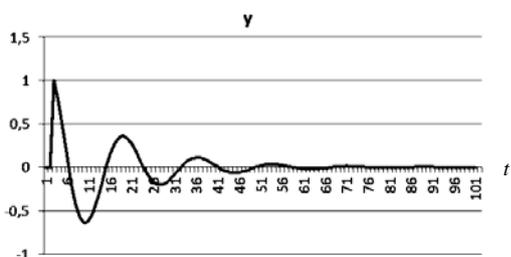


Рис. 14. Динамика переменной y_t при $\kappa = \rho = \eta = 0,5$ и $q = 0,25$

Таким образом, свойства системы зависят от значений её параметров. Перейдём к вопросу определения параметров DSGE-

моделей. В этой процедуре также проявляется специфика RBC- и DSGE-моделей.

5. Калибровка DSGE-модели

Распространённой в современных исследованиях альтернативой традиционным методам эконометрического оценивания является метод калибровки. Этот подход был введён Кидландом и Прескоттом [25] и предполагает, что модель должна воспроизводить ключевые экономические факты, наши эмпирические знания об экономике. Например, модель должна генерировать те же автокорреляционные функции, которые наблюдаются на фактических данных. При калибровке параметров для российской экономики будем следовать работе А. Зарецкого [8].

Параметр η отражает эластичность реального потребления домашних хозяйств по реальной заработной плате. При выводе IS-кривой он был принят нами за 1, т. к. была использована логарифмическая функция полезности.

Параметр ρ есть коэффициент дисконтирования домашних хозяйств. Будем считать его равным $\frac{1}{1+R}$, где $R = \pi^T + \frac{\rho}{\eta}$ – равновесная ставка процента. Тогда из решения уравнения $\rho = \frac{1}{1+\pi^T+\rho}$ при $\pi^T = 4$ (целевой уровень инфляции, установленный Банком России к 2017 г.) получаем $\rho \approx 0.2$.

Коэффициент κ калибруется по формуле [23, с. 49] $\kappa = \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)\left(\frac{1}{\eta\alpha} + \varphi + (1-\alpha)\right)}{\theta(1-(1-\alpha)(1-\varepsilon))}$, где φ – параметр, обратный эластичности предложения труда по реальной заработной плате, $\varepsilon > 1$ – эластичность замещения дифференцированных товаров.

Параметр α мы оценивали в RBC-модели, примем его значение равным 0.75.

Параметр θ характеризует степень инерционности цен. Для западных стран он оценивается в диапазоне от 0,5 до 0,75, что предполагает стабильность цен в среднем в течение 2–4 кварталов. Мы примем $\theta = 0.6$, чтобы отразить возможность российских компаний быстро изменять (в первую очередь, повышать) цены. А. Зарецкий [8] аргументировал выбор параметра $\varphi = 3$ и $\varepsilon = 6$. При таких значениях параметр $\kappa = 0.54$.

Исходя из соображений, что Банк России больше ориентируется на таргетирование инфляции, чем на стабилизацию выпуска, примем $\lambda = 10$. Тогда параметр q в уравнении Тэйлора определим как $q = \kappa/\lambda$ [32], т. е. 0.054.

При таких значениях параметров система является устойчивой (собственные числа равны 0, 0.91 и 0.25) и не содержит циклических

колебаний. Например, негативный одномоментный шок выпуска (например, от введения санкций или падения цен на нефть) приводит к резкому спаду в экономике и постепенному последующему восстановлению (рис. 15). В ответ на ускорение инфляции Центральный банк реагирует резким ростом ключевой процентной ставки, а затем очень медленно её понижает по мере замедления инфляционных процессов. Выпуск постепенно восстанавливается, и в определённый момент после восстановления наблюдается небольшой положительный разрыв выпуска.

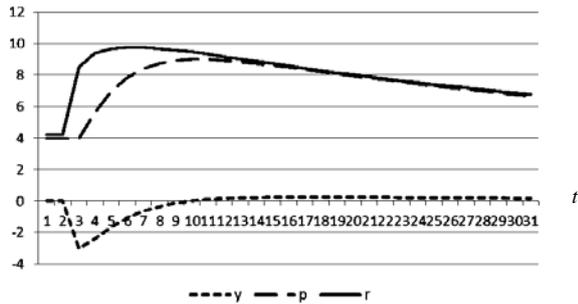


Рис. 15. Динамика переменных при непродолжительном негативном шоке выпуска

Далее рассмотрим реакцию системы на инфляционный шок, например, вследствие роста тарифов естественных монополий (рис. 16). Денежный регулятор действует аналогично: повышает ставку процента для замедления инфляции, что приводит к снижению выпуска. Затем, по мере того как $R_t - \pi_{t+1} < 0$, разрыв выпуска на некоторое время становится положительным. То есть положительный инфляционный шок по своим последствиям аналогичен негативному шоку выпуска.

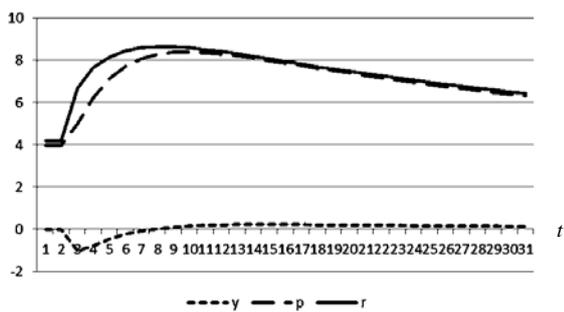


Рис. 16. Реакция системы на ценовой шок

Выше мы говорили, что параметр λ отражает предпочтения Центрального банка относительно целей денежно-кредитной политики: высокие значения λ говорят о приоритете антиинфляционного регулирования, низкие – о направленности на стабилизацию национального дохода (рис. 17–20). Постараемся ответить на вопрос, как та или иная политика влияет на экономическую динамику.

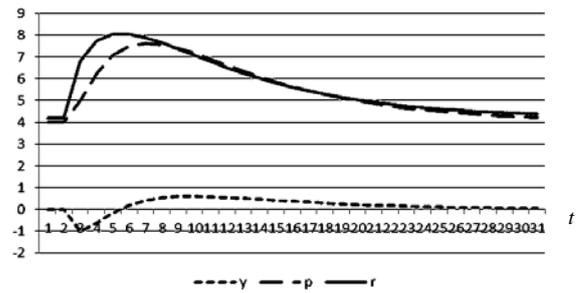


Рис. 17. Реакция системы на ценовой шок при $\lambda = 1$

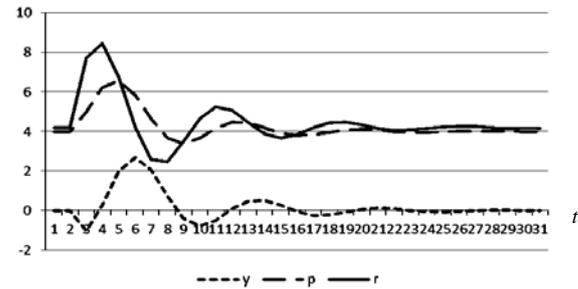


Рис. 18. Реакция системы на ценовой шок при $\lambda = 0,5$

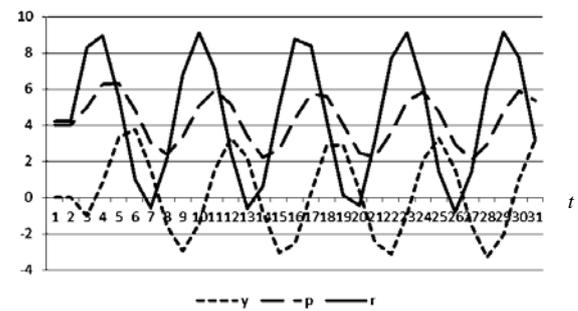


Рис. 19. Реакция системы на ценовой шок при $\lambda = 0.33$

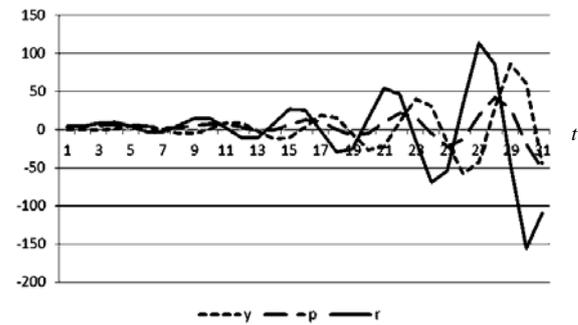


Рис. 20. Реакция системы на ценовой шок при $\lambda = 0.25$

На основе проведённых расчётов можно оценить общественное благосостояние (функцию общественных потерь) при различных значениях параметра λ . Как правило, принято переписывать общественные потери в виде

$$L = \lambda D[\pi] + D[y],$$

где $D[\pi] = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (\pi_t - \pi^T)^2$, $D[y] = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t^2$. То есть функция общественных потерь может быть интерпретирована как мера риска, как мера неопределённости экономических агентов относительно инфляции и экономического роста. Соответственно, задача Центрального банка состоит в минимизации неопределённости.

Зависимость общественных потерь от параметра λ приведена на диаграмме (рис. 21). Как видно, минимальные потери достигаются при значениях λ в интервале от 0,5 до 0,7.

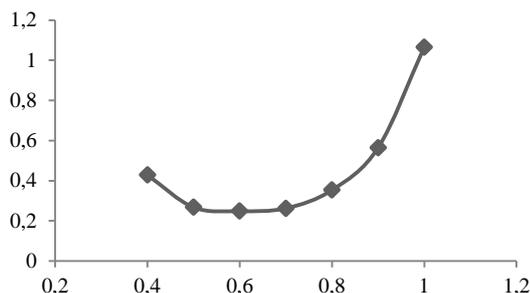


Рис. 21. Функция общественных потерь при различных значениях параметра λ

Таким образом, наиболее эффективная денежно-кредитная политика должна избегать крайностей борьбы с инфляцией или сглаживания национального дохода. Денежно-кредитная политика, направленная на оптимизацию функции общественных потерь, представляет собой компромисс между крайностями. Обращает на себя внимание также то, что в широком диапазоне $\lambda \in (0,5; 0,7)$ функция общественных потерь достаточно стабильна. Во-первых, это даёт значительное пространство для маневра денежному регулятору. Во-вторых, это позволяет исследователям не бояться ошибок при калибровке параметров модели.

Заключение

Таким образом, мы представили основы, необходимые для построения RBC и DSGE-моделей. На наш взгляд, RBC-модели пригодны для моделирования долгосрочного экономического роста на макро- и на региональном уровнях. DSGE-модели предназначены для разработки государственной экономической политики в краткосрочном периоде.

Ключевой особенностью обоих подходов является акцент на моделировании переменных через отклонения от долгосрочной траектории, использование оператора рациональных ожиданий. Значения параметров моделей определяются с помощью метода калибровки и оценивания.

К перспективам дальнейшего исследования следует отнести методы оценивания DSGE-моделей (байесовское оценивание, метод максимального правдоподобия), численные методы решения уравнений с рациональными ожиданиями, разделение фирм на производителей конечных и промежуточных товаров (агрегат Диксита – Стиглица), альтернативные варианты денежно-кредитной политики, вопросы открытой экономики, прежде всего ценообразование на валютном рынке и фактор мобильности капитала.

Список литературы

1. Андрианов Д.Л., Шульц Д.Н., Ощепков И.А. Динамическая стохастическая модель общего экономического равновесия России // Вестник Нижегородского университета. Серия: Социальные науки. 2015 №2(38). С. 18–25.
2. Андрианов Д.Л., Шульц Д.Н., Ощепков И.А. Динамические стохастические модели общего экономического равновесия // Управление экономическими системами. 2014. №7. URL: <http://uecs.ru/uecs67-672014/item/2998-2014-07-30-07-14-51> (дата обращения: 03.02.2016).
3. Апокин А.Ю., Ипатова И.Б. New normal, разрыв выпуска и многомерный фильтр Калмана. URL: http://www.forecast.ru/_ARCHIVE/Presentations/HSE/2014/АпокинИпатова2014.pdf (дата обращения: 03.02.2016).
4. Афанасьев А.А., Пономарева О.С. Производственная функция народного хозяйства России в 1990–2012 гг. // Экономика и математические методы. 2014. Т. 50, №4. С. 21–33.
5. Бадасен П., Исаков А., Хазанов А. Современная денежно-кредитная политика: обоснованная критика или типичные заблуждения экспертного сообщества? // Вопросы экономики. 2015. №6. С. 128–142.
6. Доклад о денежно-кредитной политике 2013. №1 (январь). URL: http://www.cbr.ru/publ/ddcp/2013_01_ddcp.pdf (дата обращения: 03.02.2016).
7. Зарецкий А. Методология построения, разрешения и оценки параметров DSGE моделей // Рабочий материал Исследовательского центра ИПМ WP/12/05. URL: <http://research.by/> (дата обращения: 03.02.2016).
8. Зарецкий А. Поиск оптимального варианта монетарной политики в Беларуси: результаты простой DSGE-модели. URL: <http://www.research.by/webroot/delivery/files/wp2012r06.pdf> (дата обращения: 03.02.2016).

9. *Ивантер А.* Его величество случай // Эксперт. 2006. №1–2(496). URL: http://expert.ru/expert/2006/01/economicheskaya_teoriya_38093/ (дата обращения: 03.02.2016).
10. *Иващенко С.М.* Динамическая стохастическая модель общего экономического равновесия. URL: https://eu.spb.ru/images/ec_de/wp/ec-02_13.pdf (дата обращения: 03.02.2016).
11. *Ломиворотов Р.В.* Влияние внешних шоков и денежно-кредитной политики на экономику России // Вопросы экономики. 2014. №11. С. 122–139.
12. *Малаховская О.А., Минабутдинов А.Р.* Динамическая стохастическая модель общего равновесия экспортоориентированной экономики. URL: <https://www.hse.ru/pubs/share/direct/document/115495288> (дата обращения: 03.02.2016).
13. *Микушева А.* Оценивание динамических стохастических моделей общего равновесия // Квантиль. 2014. №2. С. 1–22.
14. *Миллер Р.Л., Ван-Хуз Д.Д.* Современные деньги и банковское дело. М.: Инфра-М, 2000. 856 с.
15. *Полбин А., Дробышевский С.* Построение динамической стохастической модели общего равновесия для российской экономики. М.: Изд-во Ин-та Гайдара, 2014. 156 с.
16. *Романков В.К.* Разностные уравнения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 112 с.
17. *Фаджиоло Д., Ровентини А.* О научном статусе экономической политики: повесть об альтернативных парадигмах // Вопросы экономики. 2009. №6. С. 24–47.
18. *Федорова Е., Лысенко А.* Как влияют инструменты денежно-кредитной политики на достижение целей ЦБ РФ? // Вопросы экономики. 2013. №9. С. 106–118.
19. *Шульгин А.Г.* Сколько правил монетарной политики необходимо при оценке DSGE модели для России // Прикладная эконометрика. 2014. №36(4). С. 3–31.
20. *Calvo G.* Staggered Contracts in a Utility-Maximizing Framework // Journal of Monetary Economics. 1983. № 12. P. 383–398.
21. *Chung H., Herbst E., Kiley M.* Effective monetary policy strategies in new keynesian models: a re-examination. URL: <http://www.nber.org/papers/w20611> (дата обращения: 03.02.2016).
22. *De Jong D., Dave C.* Structural Macroeconometrics. 2nd edition. Princeton: Princeton University Press, 2011. 418 p.
23. *Gali J.* Monetary policy, inflation, and the business cycle: an introduction to the New Keynesian framework. Princeton: Princeton University Press, 2008. 203 p.
24. *Gali J., Gertler M.* Inflation dynamics: A structural econometric analysis // Journal of Monetary Economics. 1999. Vol. 44. P. 195–222.
25. *Kydland F., Prescott E.* Time to Build and Aggregate Fluctuations // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 1345–1370.
26. *Neiss K., Nelson E.* Inflation dynamics, marginal cost, and the output gap: Evidence from three countries. URL: <http://www.frbsf.org/economic-research/files/nkpcnn.pdf> (дата обращения: 03.02.2016).
27. *Olafsson T.* The New Keynesian Phillips Curve: In Search of Improvements and Adaptation to the Open Economy / Central Bank of Iceland 2006. Working Paper № 31. URL: <http://www.sedlabanki.is/lisalib/getfile.aspx?itemid=4673> (дата обращения: 03.02.2016).
28. *Rational Expectations and Econometric Practice* / Ed. by Lucas R., Sargent T. Minneapolis: The University of Minnesota Press, 1984. 689 p.
29. *Romer D.* Advanced Macroeconomics. Second edition. Boston: MacGraw Hill, 2001. 631 p.
30. *Rotemberg J., Woodford M.* Oligopolistic pricing and the effect of aggregate demand on economic activity // Journal of Political Economy. 1992. Vol. 100. P. 1153–1207.
31. *Taylor J.* Staggered Wage Setting in a Macro Model // The American Economic Review. 1979. Vol. 69, № 2. P. 108–113.
32. *Woodford M.* Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy. Princeton: Princeton University Press, 2003. 597 p.

Получено: 03.05.2016.

References

1. Andrianov D.L., Shul'ts D.N., Oshchepkov I.A. Dinamicheskaja stokhasticheskaja model' obshchego ekonomicheskogo ravnovesiia Rossii [Dynamic stochastic model of Russia's general economic equilibrium]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta. Seria: Sotsialnye nauki* [Nizhny Novgorod University Bulletin. Series: Social Sciences], 2015, no. 2(38), pp. 18–25. (In Russian).
2. Andrianov D.L., Shul'ts D.N., Oshchepkov I.A. Dinamicheskie stokhasticheskie modeli obshchego ekonomicheskogo

ravnovesiia [Dynamic Stochastic General Equilibrium Models]. *Upravlenie ekonomicheskimi sistemami* [Management of economic systems], 2014, no. 7. (In Russian) Available at: <http://uecs.ru/uecs67-672014/item/2998-2014-07-30-07-14-51> (accessed 03.02.2016).

3. Apokin A.Iu., Ipatova I.B. *New normal, razryv vypuska i mnogomernyi fil'tr Kalmana* [New normal, output gap and multidimensional Kalman filter]. (In Russian) Available at: http://www.forecast.ru/_ARCHIVE/Presentations/HSE/2014/ApokinIpatova2014.pdf (accessed 03.02.2016).

4. Afanas'ev A.A., Ponomareva O.S. *Proizvodstvennaia funktsiia narodnogo hoziaistva Rossii v 1990–2012 gg.* [The aggregate production function of Russian economy in 1990–2012]. *Ekonomika i matematicheskie metody* [Economics and the Mathematical Methods], 2014, vol. 50, no. 4, pp. 21–33. (In Russian).

5. Badasen P., Isakov A., Khazanov A. *Sovremennaiia denezhno-kreditnaia politika: obosnovannaia kritika ili tipichnye zabluzhdeniia ekspertnogo soobshchestva?* [Modern monetary policy: credible criticism or common misconceptions of expert community?]. *Voprosy ekonomiki* [Economic issues], 2015, no. 6, pp. 128–142. (In Russian).

6. *Doklad o denezhno-kreditnoi politike 2013* [Monetary policy report. 2013], no. 1. (In Russian) Available at: http://www.cbr.ru/publ/ddcp/2013_01_ddcp.pdf (accessed 03.02.2016).

7. Zaretskii A. *Metodologiiia postroeniia, razresheniia i otsenki parametrov DSGE modelei* [Methodology of construction, evaluation and calibration of DSGE models parameters]. *Rabochii material Issledovatel'skogo centra IPM WP/12/05*. (In Russian) Available at: <http://research.by/> (accessed 03.02.2016).

8. Zaretskii A. *Poisk optimal'nogo varianta monetarnoi politiki v Belarusi: rezul'taty prostoi DSGE-modelei* [Search of optimal variant of monetary policy in Belarus: results of a simple DSGE-model]. (In Russian) Available at: <http://www.research.by/webroot/delivery/files/wp/2012r06.pdf> (accessed 03.02.2016).

9. Ivanter A. *Ego velichestvo sluchai* [His Majesty the chance]. *Ekspert* [Expert], 2006, no. 1-2(496). (In Russian) Available at: http://expert.ru/expert/2006/01/ekonomicheskaya_teoriya_38093/ (accessed 03.02.2016).

10. Ivashchenko S.M. *Dinamicheskaiia stokhasticheskaiia model' obshchego ekonomicheskogo ravnovesiia* [Dynamic stochastic general equilibrium model]. (In Russian) Available at: https://eu.spb.ru/images/ec_dep/wp/ec-02_13.pdf (accessed 03.02.2016).

11. Lomivorotov R.V. *Vliianie vneshnikh shokov i denezhno-kreditnoi politiki na ekonomiku Rossii* [The impact of external shocks and monetary policy on the economy of Russia]. *Voprosy ekonomiki* [Economic issues], 2014, no. 11, pp. 122–139. (In Russian).

12. Malakhovskaia O.A., Minabutdinov A.R. *Dinamicheskaiia stokhasticheskaiia model' obshchego ravnovesiia eksportoorientirovannoi ekonomiki* [Dynamic stochastic general equilibrium model of export-specialized economy]. (In Russian) Available at: <https://www.hse.ru/pubs/share/direct/document/115495288> (accessed 03.02.2016).

13. Mikusheva A. *Otsenivanie dinamicheskikh stokhasticheskikh modelei obshchego ravnovesiia* [Calibration of dynamic stochastic general equilibrium model]. *Kvantil'* [Quantil], 2014, no. 2, pp. 1–22. (In Russian).

14. Miller R.L., Van-Huz D.D. *Sovremennye dengi i bankovskoe delo* [Modern money and banking]. Moscow, Infra-M Publ., 2000. 856 p. (In Russian).

15. Polbin A., Drobyshevskii S. *Postroenie dinamicheskoi stokhasticheskoi modeli obshchego ravnovesiia dlia rossiiskoi ekonomiki* [Construction of dynamic stochastic general equilibrium model for Russian economy]. Moscow, Izdatel'stvo Instituta Gaidara Publ., 2014. 156 p. (In Russian).

16. Romankov V.K. *Raznostnye uravneniia* [Difference equation]. Moscow, BINOM, Laboratoriia znaniia Publ., 2012. 112 p. (In Russian).

17. Fadziolo D., Roventini A. *O nauchnom statuse ekonomicheskoi politiki: povest' ob alternativnykh paradigmakh* [On the Scientific Status of Economic Policy: A Tale of Alternative Paradigms]. *Voprosy ekonomiki* [Economic issues], 2009, no. 6, pp. 24–47. (In Russian).

18. Fedorova E., Lysenko A. *Kak vliiaiat instrumenty denezhno-kreditnoi politiki na dostizhenie tcelei CB RF?* [Assessing the Impact of the Instruments of Monetary Policy on Achieving Objectives of the Central Bank of RF?]. *Voprosy ekonomiki* [Economic issues], 2013, no. 9, pp. 106–118. (In Russian).

19. Shul'gin A.G. *Skol'ko pravil monetarnoi politiki neobkhodimo pri otsenke DSGE modeli dlia Rossii?* [How much monetary policy rules do we need to estimate DSGE model for Russia?]. *Prikladnaia ekonometrika* [Applied econometrics], 2014, no. 36 (4), pp. 3–31. (In Russian).

20. Calvo G. *Staggered Contracts in a Utility-Maximizing Framework*. *Journal of Monetary Economics*, 1983, no. 12, pp. 383–398.

21. Chung H., Herbst E., Kiley M. *Effective monetary policy strategies in new keynesian models: a re-examination*. Available at: <http://www.nber.org/papers/w20611> (accessed 03.02.2016).
22. DeJong D., Dave C. *Structural Macroeconomics. 2nd edition*. Princeton, Princeton University Press, 2011. 418 p.
23. Gali J. *Monetary policy, inflation, and the business cycle: an introduction to the New Keynesian framework*. Princeton, Princeton University Press, 2008. 203 p.
24. Gali J., Gertler M. Inflation dynamics: A structural econometric analysis. *Journal of Monetary Economics*, 1999, vol. 44, pp. 195–222.
25. Kydland F., Prescott E. Time to Build and Aggregate Fluctuations. *Econometrica*, 1982, vol. 50, pp. 1345–1370.
26. Neiss K., Nelson E. *Inflation dynamics, marginal cost, and the output gap: Evidence from three countries*. Available at: http://www.frbsf.org/economic-research/files/nkp_cnn.pdf (accessed 03.02.2016).
27. Olafsson T. The New Keynesian Phillips Curve: In Search of Improvements and Adaptation to the Open Economy. *Central Bank of Iceland 2006, Working Paper № 31*. Available at: http://www.sedlabanki.is/lisalib/getfile.aspx?it_emid=4673 (accessed 03.02.2016).
28. *Rational Expectations and Econometric Practice*. Ed. by Lucas R., Sargent T. Minneapolis, The University of Minnesota Press, 1984. 689 p.
29. Romer D. *Advanced Macroeconomics. Second edition*. Boston, MacGraw Hill Publ., 2001. 631 p.
30. Rotemberg J., Woodford M. Oligopolistic pricing and the effect of aggregate demand on economic activity. *Journal of Political Economy*, 1992, vol. 100, pp. 1153–1207.
31. Taylor J. Staggered Wage Setting in a Macro Model. *The American Economic Review*, 1979, vol. 69, no. 2, pp. 108–113.
32. Woodford M. *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*. Princeton, Princeton University Press, 2003. 597 p.

The date of the manuscript receipt:
03.05.2016.

SOME ASPECTS OF CONSTRUCTION AND USE OF DYNAMIC STOCHASTIC GENERAL EQUILIBRIUM (DSGE) MODELS

Dmitriy N. Shults, Candidate of Economic Sciences, Associate Professor

E-mail: shultz@prognoz.ru

Perm State University;

15, Bukireva st., Perm, 614990, Russian Federation

Ivan A. Oshchepkov, Postgraduate Student

E-mail: oshchepkov@prognoz.ru

Perm State University;

15, Bukireva st., Perm, 614990, Russian Federation

The article deals with practical aspects of constructing dynamic stochastic general equilibrium models (DSGE). A basic model of the real business cycle theory (RBC) is considered. The basic RBC model and DSGE models are compared, their similarities and differences are analyzed. By the example of the Russian economy it is shown that these classes of models are sensitive to smoothing parameters. In other words, the procedure of identifying the potential (equilibrium) GDP is crucial for the subsequent analysis of the economy's properties. It is shown that Russia's GDP can be adequately modeled by extracting the long-term component by the Hodrick-Prescott filter, using the AR model of order 4 and taking into account world oil prices. An algorithm for constructing a DSGE model suitable for use in university courses of macroeconomics and mathematical modeling, simple methods of deriving the dynamic IS-curve, New Keynesian Phillips curve and Taylor equation are analyzed. The DSGE model constructed is found to have 2 equilibrium states. The problems arising when forecasting based on models with the rational expectation operator are considered. Different approaches to solving equations with rational expectations are described: the Blanchard method, through reduction to adaptive expectations, through determining rational expectations. The conditions for stability of the model considered and for cyclical fluctuations are derived. A DSGE model parameters are calibrated for the economy of modern Russia. The effectiveness of monetary policy is analyzed, including anti-inflationary and stimulating policies. The social welfare function and the optimal parameters of monetary policy minimizing deviations from target inflation and GDP deviations from

the long-term level are calculated. The article can be useful for specialists in economic-mathematical modeling and macroeconomic forecasting.

Keywords: dynamic stochastic general equilibrium models, DSGE, real business cycle theory, RBC, time series smoothing, macroeconomic forecasting, rational and adaptive expectations, inflation targeting, monetary policy, Taylor rule.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Шульц Д.Н., Ощепков И.А. Некоторые аспекты построения и использования динамических стохастических моделей общего равновесия (DSGE) // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2016. № 4(31). С. 49–65. doi: 10.17072/1994-9960-2016-4-49-65

Please cite this article in English as:

Shults D.N., Oshchepkov I.A. Some aspects of construction and use of dynamic stochastic general equilibrium (DSGE) models // Vestnik Permskogo universiteta. Seria Ekonomika = Perm University Herald. Economy. 2016. № 4(31). P. 49–65. doi: 10.17072/1994-9960-2016-4-49-65